

Über invariante Gebilde ternärer Formen.

Von **F. Mertens.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 31. März 1887.)

1.

In der Theorie der invarianten Gebilde ternärer Formen spielen gewisse Operationen eine wesentliche Rolle, welche mit den auf dieselben Bezug habenden Formeln zunächst erörtert werden sollen.

Die Operation

$$y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial z_3}$$

soll mit $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ bezeichnet und Polarenbildung, das Resultat $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \omega$ der Vollziehung derselben an einer Function ω eine Polare der letzteren genannt werden. Eine Polare kann wieder der Operation der Polarenbildung unterworfen werden; das Resultat mehrerer auf einander folgenden Polarenbildungen wird ebenfalls eine Polare und zwar, wenn eine genauere Bezeichnung wünschenswerth ist, eine zwei-, drei-, n-fache genannt.

Wenn verschiedene Gruppen von je drei Veränderlichen

$$\begin{matrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \\ \\ x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & x_3^{(p)} \end{matrix} \tag{1}$$

durch obere Stellenzeiger unterschieden werden, so soll die Polarenbildung

$$x_1^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_1^{(i)}} + x_2^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_2^{(i)}} + x_3^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_3^{(i)}}$$

durch das Symbol $\begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix}$ bezeichnet werden.

Vertauscht man in einer zweifachen Polare einer ganzen Function φ der Veränderlichen (1), welche in Bezug auf die Veränderlichen jeder der p Gruppen homogen ist, die Reihenfolge der Operationen, so ändert sich dieselbe entweder gar nicht oder nur um einen Ausdruck, welcher, von einem Zahlencoëfficienten abgesehen, die Function φ selbst oder eine einfache Polare derselben ist. Es bedarf nur eines Beweises, wenn die beiden vorzunehmenden Polarenbildungen nicht identisch sind. Derselbe ist in den Formeln

$$\binom{\nu}{\mu}\binom{\mu}{\nu}\varphi - \binom{\mu}{\nu}\binom{\nu}{\mu}\varphi = (m_\nu - m_\mu)\varphi$$

$$\binom{\nu}{\mu}\binom{\mu}{\rho}\varphi - \binom{\mu}{\rho}\binom{\nu}{\mu}\varphi = \binom{\nu}{\rho}\varphi$$

$$\binom{\nu}{\mu}\binom{\sigma}{\nu}\varphi - \binom{\sigma}{\nu}\binom{\nu}{\mu}\varphi = -\binom{\sigma}{\mu}\varphi$$

$$\binom{\nu}{\mu}\binom{\sigma}{\rho}\varphi - \binom{\sigma}{\rho}\binom{\nu}{\mu}\varphi = 0$$

enthalten, in welchen ν und ρ, μ und σ verschiedene Stellenzeiger und m_i den Grad von φ in Bezug auf $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, $x_3^{(i)}$ bezeichnen.

Es sei ω eine ganze Function der Veränderlichen (1), welche in Bezug auf jede der p Gruppen homogen ist und nach Ersetzung von

$$x_i^{(1)},\ x_i^{(2)} \qquad x_i^{(p)}$$

für jeden der Werthe 1, 2, 3 von i durch die Polynome

$$\begin{array}{l} t_{11}\,x_i^{(1)} + t_{12}\,x_i^{(2)} + \ldots \qquad + t_{1p}\,x_i^{(p)} \\ t_{21}\,x_i^{(1)} + t_{22}\,x_i^{(2)} + \ldots \qquad + t_{2p}\,x_i^{(p)} \\ \quad\cdot \\ t_{p1}\,x_i^{(1)} + t_{p2}\,x_i^{(2)} + . \qquad + t_{pp}\,x_i^{(p)} \end{array}$$

in ω^0 übergehen möge, und man bezeichne die Coëfficienten in der Entwickelung von ω^0 nach den Elementen

$$t_{11},\ t_{12},\ \ldots \quad t_{pp}$$

allgemein mit Γ. Es gelten dann folgende Sätze.

1. Jeder der Ausdrücke Γ wird durch eine Polarenbildung $\binom{k}{i}$ in eine lineare Function derselben Ausdrücke mit Zahlencoëfficienten verwandelt. Denn es ist

$$\binom{k}{i}\,\omega^0 = t_{1i}\,\frac{\partial\omega^0}{\partial t_{1k}} + t_{2i}\,\frac{\partial\omega^0}{\partial t_{2k}} + \ldots + t_{pi}\,\frac{\partial\omega^0}{\partial t_{pk}}.$$

2. Wenn $p > 3$ und Γ' diejenigen Coëfficienten von ω^0 bezeichnen, welche nur die ersten drei Gruppen der Veränderlichen (1) enthalten, welche also aus der Entwickelung von ω hervorgehen, nachdem man $x_i^{(k)}$ für $i = 1, 2, 3$ und $k = 1, 2, 3, \ldots p$ durch

$$t_{k1}x_i^{(1)} + t_{k2}x_i^{(2)} + t_{k3}x_i^{(3)}$$

ersetzt hat, so lässt sich ω, wenn es nicht in Bezug auf alle p—3 letzten Gruppen der Veränderlichen (1) vom Grade 0 ist, in der Form

$$\omega = \mathfrak{z}P + \mathfrak{z}'P' + \ldots \qquad 2)$$

darstellen, wo $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \ldots$, wie überall im Folgenden, Zahlencoëfficienten bezeichnen und P, P', Polaren der Ausdrücke Γ sind, die nur Polarenbildungen $\binom{\nu}{\mu}$ enthalten, in welchen $\nu > 3$ und $\mu < 4$ ist.

Ich habe an einem anderen Orte[1] gezeigt, dass ω, wenn es in Bezug auf

$$x_1^{(r)},\ x_2^{(r)},\ x_3^{(r)} \qquad 3)$$

nicht vom Grade 0 und $r > 3$ ist, immer linear durch Polaren von Functionen ausgedrückt werden kann, welche selbst wieder Polaren von ω sind, jedoch die Veränderlichen (3) nicht mehr enthalten. Die wiederholte Anwendung dieses Satzes lehrt, dass ω immer linear durch Polaren von Ausdrücken darstellbar ist, welche selbst Polaren von ω sind und nur die ersten drei Gruppen der Veränderlichen (1) enthalten. Nach 1) folgt hieraus, dass ω in der Form (2) darstellbar ist, wenn $P, P', \ldots$ Polaren der Ausdrücke

[1] Über eine Formel der Determinantentheorie F. (5). Sitzb. d. kais. Akad. d. Wissensch. II. Abth. Bd. XCI, Jahrg. 1885.

Γ' bezeichnen, und es bleibt nur noch zu zeigen, dass man die in $P, P', \ldots$ auftretenden Polarenbildungen $\binom{\nu}{\mu}$ immer so annehmen darf, dass $\mu < 4$ und $\nu > 3$ ist. Hätte etwa P nicht diese gewünschte Form, so kommt unter den zu P führenden Polarenbildungen $\binom{\nu}{\mu}$ wenigstens eine vor, in welcher entweder $\mu < 4$ und $\nu < 4$ oder aber $\mu > 3$ ist. Im ersten Falle kann man, wenn $\binom{\nu}{\mu}$ die erste auszuführende Operation ist, $\binom{\nu}{\mu}\Gamma'$ linear durch Coëfficienten Γ' ausdrücken und demgemäss P auf niedrigere Polaren zurückführen; ist dagegen $\binom{\nu}{\mu}$ eine spätere Operation, so kann man durch Vertauschung derselben mit allen vorhergehenden, wodurch sie an die erste Stelle gelangt, P wieder auf niedrigere Polaren zurückführen. Im zweiten Falle hat man, wenn $\binom{\nu}{\mu}$ die erste Operation ist, $\binom{\nu}{\mu}\Gamma' = 0$ und daher auch $P = 0$, da Γ' die Elemente $x_1^{(\mu)}, \ldots$ nicht enthält; ist dagegen $\binom{\nu}{\mu}$ eine spätere Operation, so kann man durch Vertauschung derselben mit allen vorhergehenden P auf niedrigere Polaren zurückführen, da das Resultat der letzten Vertauschung identisch verschwindet. Dieses Verfahren lässt sich, wenn nöthig, an den Gliedern des für P erhaltenen Aggregats wiederholen, bis man zu Ausdrücken gelangt, welche nur noch Polarenbildungen der gewünschten Art erheischen. Ebenso kann, wenn nöthig, mit $P', \ldots$ verfahren werden.

2.

Die Operation

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \, \partial u_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \, \partial u_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \, \partial u_3}$$

soll mit $\square_{xu}$, ihre Wiederholungen mit $\square_{xu}^2, \square_{xu}^3, \ldots$ bezeichnet werden.

Ist ω eine ganze homogene Function m^{ten} Grades von x_1, x_2, x_3 und zugleich eine ganze homogene Function n^{ten} Grades

von u_1, u_2, u_3 und bezeichnet man den Ausdruck

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

in üblicher Weise mit u_x, so wird

$$\square_{xu} u_x^p \omega = 3p u_x^{p-1} \omega + p(p-1) u_x^{p-1} \omega + u_x^p \square_{xu} \omega \tag{4}$$

$$+ p u_x^{p-1} \left(u_1 \frac{\partial \omega}{\partial u_1} + . \quad + x_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + . . \right)$$

$$= p(m+n+p+2) u_x^{p-1} \omega + u_x^p \square_{xu} \omega.$$

Unter derselben Voraussetzung ist:

$$\square_{xu} s_x \omega = s_x \square_{xu} \omega + \binom{s}{u} \omega$$

$$\square_{xu}^2 s_x \omega = s_x \square_{xu}^2 \omega + 2 \binom{s}{u} \square_{xu} \omega$$

$$\cdot$$

$$\square_{xu}^{m+1} s_x \omega = (m+1) \binom{s}{u} \square_{xu}^m \omega.$$

Hieraus folgt

$$\square_{xu}^{m+p} s_x^p \omega = (m+p) \binom{s}{u} \square_{xu}^{m+p-1} s_x^{p-1} \omega \tag{5}$$

$$= (m+p)(m+p-1) \binom{s}{u}^2 \square_{xu}^{m+p-2} s_x^{p-2} \omega$$

$$= (m+p)(m+p-1) \ldots (m+1) \binom{s}{u}^p \square_{xu}^m \omega$$

und aus ähnlichen Gründen

$$\square_{xu}^{n+p} u_z^p \omega = (n+p)(n+p-1) \ldots (n+1) \binom{z}{x}^p \square_{xu}^n \omega. \tag{6}$$

Ferner wird, wenn ω auch die Veränderlichen z_1, z_2, z_3 enthält,

$$\square_{xu} \binom{x}{z} \omega = \square_{zu} \omega + \binom{x}{z} \square_{xu} \omega$$

$$\square_{xu}^2 \binom{x}{z} \omega = 2 \square_{zu} \square_{xu} \omega + \binom{x}{z} \square_{xu}^2 \omega$$

$$\square_{xu}^{m+1}\binom{x}{z}\omega = (m+1)\square_{zu}\square_{xu}^{m}\omega.$$

Hieraus folgt

$$\square_{xu}^{m+p}\binom{x}{z}^{p}\omega = (m+p)(m+p-1)\ldots(m+1)\square_{zu}^{p}\square_{xu}^{m}\omega. \qquad 7)$$

3.

Die Operation

$$u_1\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial y_3}-\frac{\partial^2}{\partial x_3\,\partial y_2}\right)+u_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3\,\partial y_1}-\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial y_3}\right)+u_3\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial y_2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial y_1}\right)$$

und ihre Wiederholungen sollen mit $\binom{u}{xy}$, $\binom{u}{xy}^2, \ldots$, die Determinanten

$$x_2y_3-x_3y_2 \qquad x_3y_1-x_1y_3 \qquad x_1y_2-x_2y_1$$

mit

$$(xy)_1 \qquad (xy)_2 \qquad (xy)_3$$

und die Operation

$$(xy)_1\frac{\partial}{\partial u_1}+(xy)_2\frac{\partial}{\partial u_2}+(xy)_3\frac{\partial}{\partial u_3}$$

mit $\binom{x\cdot y}{u}$ bezeichnet werden. Das Resultat, in welches eine Function $f(u)$ von u_1, u_2, u_3 für die Substitution

$$u_1=(xy)_1 \qquad u_2=(xy)_2 \qquad u_3=(xy)_3$$

übergeht, kann bequem durch $f(x\cdot y)$ ausgedrückt werden.

Man hat:

$$\binom{u}{xy}u_x\omega = u_x\binom{u}{xy}\omega$$

$$\binom{u}{xy}u_y\omega = u_y\binom{u}{xy}\omega \qquad (8)$$

$$\square_{xu}\binom{u}{xy} = \binom{u}{xy}\square_{xu}$$

$$\square_{yu}\binom{u}{xy} = \binom{u}{xy}\square_{yu} \qquad (9)$$

$$\square_{ys}\begin{pmatrix} s \cdot u \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \cdot u \\ x \end{pmatrix}\square_{ys}.$$

Ist daher ω vom Grade n in Bezug auf s_1, s_2, s_3, so wird

$$\square_{ys}^{n+1}\begin{pmatrix} s \cdot u \\ x \end{pmatrix}\omega = (n+1)\begin{pmatrix} u \\ xy \end{pmatrix}\square_{ys}^{n}\omega$$

$$\square_{ys}^{n+p}\begin{pmatrix} s \cdot u \\ x \end{pmatrix}^p\omega = (n+p)(n+p-1)\ldots(n+1)\begin{pmatrix} u \\ xy \end{pmatrix}^p\square_{ys}^{n}\omega. \qquad 10)$$

Ist die Function φ homogen und vom Grade μ in Bezug auf x_1, x_2, x_3, homogen und vom Grade ν in Bezug auf y_1, y_2, y_3 und von u_1, u_2, u_3 unabhängig, so genügt die Function

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\nu-p}\begin{pmatrix} u \\ xy \end{pmatrix}^p\varphi = \Theta$$

der Gleichung

$$\square_{xu}\Theta = 0. \qquad 11)$$

Setzt man nämlich

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\nu-p}\varphi = \varphi_1,$$

so wird

$$\Theta = \begin{pmatrix} u \\ xy \end{pmatrix}^p\varphi_1$$

$$\square_{xu}\Theta = \begin{pmatrix} u \\ xy \end{pmatrix}^p\square_{xu}\varphi_1 = 0.$$

4.

Wenn $\omega(x, y, u)$ eine ganze homogene Function sowohl von x_1, x_2, x_3 als auch y_1, y_2, y_3 und u_1, u_2, u_3 mit den Gradzahlen m, m', n ist und zur Abkürzung

$$(xy)_1 = w_1 \qquad (xy)_2 = w_2 \qquad (xy)_3 = w_3$$

gesetzt wird, so findet man

$$\begin{pmatrix} u \\ xy \end{pmatrix}\omega(x,y,w) = \left(\begin{pmatrix} u \\ xy \end{pmatrix}\right)\omega(x,y,w) + (m+m'+n+1)\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}\omega(x,y,w)$$
$$-u_x\square_{xw}\omega(x,y,w) - u_y\square_{yw}\omega(x,y,w); \qquad 12)$$

die doppelten Klammern sollen andeuten, dass bei der Operation von den Determinanten w_1, w_2, w_3 abzusehen ist. Diese Formel zeigt, dass der Grad in Bezug auf die genannten Determinanten durch die Operation $\begin{pmatrix} u \\ xy \end{pmatrix}$ höchstens um eine Einheit verringert wird.

Ist ω von y_1, y_2, y_3 unabhängig oder $m' = 0$, so folgt aus (12)

$$\begin{pmatrix} u \\ xy \end{pmatrix}\omega(x,w) = (m+n+1)\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}\omega(x,w) - u_x \square_{xw}\,\omega(x,w)$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Formel

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u \\ xy \end{pmatrix}^n \omega(x,w) &= (m+n+1)(m+n)\ldots(m+2)\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}^n \omega(x,w) \\ &+ C_1 u_x \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}^{n-1} \square_{xw}\,\omega(x,w) + C_2 u_x^2 \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}^{n-2} \square_{xw}^2\,\omega(x,w) + \ldots \quad (13) \\ &= \frac{(m+n+1)!\,n!}{(m+1)!}\,\omega(x,u) + \mathfrak{z}_1 u_x \square_{xu}\,\omega(x,u) + \mathfrak{z}_2 u_x^2 \square_{xu}^2\,\omega(x,u) \\ &+ \ldots + \mathfrak{z}_p u_x^p \square_{xu}^p\,\omega(x,u),\end{aligned}$$

wo $C_1, C_2, \ldots \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$ Zahlencoëfficienten und p die kleinere der Zahlen m, n oder auch eine derselben (wenn $m = n$) bezeichnen. Genügt ω insbesondere der Gleichung (11), so wird

$$\begin{pmatrix} u \\ xy \end{pmatrix}^n \omega(x,w) = \frac{(m+n+1)!\,n!}{(m+1)!}\,\omega(x,u). \qquad (14)$$

Eine Function $\omega(x,u)$, welche der Gleichung (11) genügt und für die Substitution

$$u_1 = (xy)_1 \qquad u_2 = (xy)_2 \qquad u_3 = (xy)_3 \qquad (15)$$

verschwindet, wo y_1, y_2, y_3 beliebige Veränderliche bezeichnen, ist identisch $= 0$; es ist dann nämlich auch

$$\begin{pmatrix} u \\ xy \end{pmatrix}^n \omega(x, xy) = 0$$

und demzufolge nach (14)

$$\frac{(m+n+1)!\,n!}{(m+1)!}\,\omega(x,u) = 0.$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Theilbarkeit eines ganzen bihomogenen Ausdruckes $\omega(x, u)$ der Veränderlichen x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3 durch u_x besteht in dem identischen Verschwinden desselben für die Substitution (15). Ist nämlich

$$\omega = Q . u_x,$$

so hat man

$$\omega(x, x \cdot y) = 0;$$

findet umgekehrt diese Identität statt, so ist auch

$$\begin{pmatrix} u \\ xy \end{pmatrix}^n \omega(x, x \cdot y) = 0$$

und daher nach (13)

$$\frac{(m+n+1)!\,n!}{(m+1)!}\,\omega = u_x(-\mathfrak{z}_1 \square_{xu}\,\omega - \mathfrak{z}_2\, u_x \square_{xu}^2\,\omega - \ldots).$$

Herr Gordan hat gezeigt,[1] dass jedem ganzen bihomogenen Ausdrucke $\Theta(x, u)$ der Veränderlichen x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3 und zwar nur auf eine Weise die Gestalt

$$\Theta = \omega_0 + u_x \omega_1 + u_x^2 \omega_2 + \ldots \tag{16}$$

gegeben werden kann, wo $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ der Gleichung (11) genügende bihomogene Functionen der genannten Veränderlichen bezeichnen. Diese Entwicklung ergibt sich folgendermassen aus dem Vorhergehenden.

Findet die gewünschte Identität statt, so hat man

$$\Theta(x, x \cdot y) = \omega_0(x, x \cdot y)$$

und demzufolge nach (14), wenn m, n die Gradzahlen von Θ sind,

$$\begin{pmatrix} u \\ xy \end{pmatrix}^n \Theta(x, x \cdot y) = \begin{pmatrix} u \\ xy \end{pmatrix}^n \omega_0(x, x \cdot y) = \frac{(m+n+1)!\,n!}{(m+1)!}\,\omega_0.$$

Hieraus folgt, wenn

$$\square_{xu}^k \Theta = \Theta_k$$

gesetzt wird,

---

[1] Über Combinanten. Mathem. Annalen. Bd. V.

$$\omega_0 = \frac{(m+1)!}{(m+n+1)!\, n!} \binom{u}{xy}^n \Theta(x, x\cdot y) = \Theta + C_1 u_x \Theta_1 + C_2 u_x^2 \Theta_2 + \ldots$$

Ferner ergibt sich nach (4) aus (16)

$$\Theta_k = \frac{k!(m+n-k+2)!}{(m+n-2k+2)!} \omega_k + \mathfrak{z} u_x \omega_{k+1} + .$$

$$\omega_k(x, x\cdot y) = \frac{(m+n-2k+2)!}{k!\,(m+n-k+2)!} \Theta_k(x, x\cdot y)$$

$$\omega_k = \frac{(m-k+1)!}{(m+n-2k+1)!\,(n-k)!} \cdot \frac{(m+n-k+2)!}{k!\,(m+n-k+2)!} \binom{u}{xy}^{n-k} \Theta_k(x, x\cdot y)$$

$$= C' \Theta_k + C'_1 u_x \Theta_{k+1} \ldots$$

$$k = 1, 2, .$$

Legt man umgekehrt diese Werthe von $\omega_0, \omega_1, .$ zu Grunde, so ergibt sich die Identität (16) durch Elimination von $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ zwischen den Gleichungen

$$\frac{(m+1)!}{(m+n+1)!\, n!} \binom{u}{xy}^n \Theta(x, x\cdot y) = \Theta + \mathfrak{z}_1 u_x \Theta_1 + \mathfrak{z}_2 u_x^2 \Theta_2 + .$$

$$\frac{m!}{(m+n-1)!\,(n-1)!} \binom{u}{xy}^{n-1} \Theta_1(x, x\cdot y) = \Theta_1 + \mathfrak{z}'_1 u_x \Theta_2 + \mathfrak{z}'_2 u_x^2 \Theta_3 + \ldots$$

5.

Die Operation

$$\frac{\partial^3}{\partial\xi_1 \partial\eta_2 \partial\zeta_3} - \frac{\partial^3}{\partial\xi_1 \partial\eta_3 \partial\zeta_2} + \frac{\partial^3}{\partial\xi_2 \partial\eta_3 \partial\zeta_1} - \frac{\partial^3}{\partial\xi_2 \partial\eta_1 \partial\zeta_3} + \frac{\partial^3}{\partial\xi_3 \partial\eta_1 \partial\zeta_2} - \frac{\partial^3}{\partial\xi_3 \partial\eta_2 \partial\zeta_1}$$

soll mit $\nabla_{\xi\eta\zeta}$ bezeichnet werden. Dieselbe ist mit jeder der Polarenbildungen

$$\binom{\eta}{\xi}, \binom{\xi}{\eta}, \binom{\zeta}{\xi}, \binom{\xi}{\zeta}, \binom{\zeta}{\eta}, \binom{\eta}{\zeta} \qquad (17)$$

vertauschbar.

Bezeichnet ω eine sowohl in Bezug auf ξ_1, ξ_2, ξ_3 als auch η_1, η_2, η_3 und $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ homogene ganze Function, M eine ganze

positive Zahl, (ω) eine Polare von ω, in welcher die erste der zu vollziehenden Polarenbildungen entweder $\binom{\eta}{\zeta}$ oder $\binom{\xi}{\zeta}$ oder $\binom{\xi}{\eta}$ ist, so hat man

$$\nabla_{\xi\eta\zeta}(\xi\eta\zeta)\omega = M\omega + \Sigma_{\mathfrak{z}}(\omega), \tag{18}$$

wo

$$(\xi\eta\zeta) = \Sigma \pm \xi_1 \eta_2 \zeta_3.$$

Diese Identität ergibt sich aus der Formel (14) meines oben citirten Aufsatzes, wenn man dieselbe auf die Function $(\xi\eta\zeta)\omega$ anwendet; es wird dann, da

$$\binom{\xi}{\zeta}(\xi\eta\zeta)\omega = (\xi\eta\zeta)\binom{\xi}{\zeta}\omega$$

ist,

$$M(\xi\eta\zeta)\omega = \Sigma_{\mathfrak{z}}(\xi\eta\zeta)(\omega) + (\xi\eta\zeta)\nabla_{\xi\eta\zeta}(\xi\eta\zeta)\omega$$

und hieraus nach Forthebung von $(\xi\eta\zeta)$

$$\nabla_{\xi\eta\zeta}(\xi\eta\zeta)\omega = M\omega - \Sigma_{\mathfrak{z}}(\omega).$$

6.

Es seien

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \tag{19}$$

und

$$u_1 \quad u_2 \quad u_3 \tag{20}$$

Veränderliche, welche in Anlehnung an die analytische Geometrie Punkt- beziehungsweise Strahlencoordinaten genannt werden sollen. Eine bihomogene Form φ dieser Veränderlichen, welche in Bezug auf x_1, x_2, x_3 vom Grade m und in Bezug auf u_1, u_2, u_3 vom Grade n ist, werde ich vom Grade m und der Classe n, die Zahlen m, n kurz die Gradzahlen von φ nennen.

Macht man in einer Form φ der Veränderlichen (19), (20) die Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 X_1 + \eta_1 X_2 + \zeta_1 X_3 & u_1 &= (\eta\zeta)_1 U_1 + (\zeta\xi)_1 U_2 + (\xi\eta)_1 U_3 \\ x_2 &= \xi_2 X_1 + \eta_2 X_2 + \zeta_2 X_3 & u_2 &= (\eta\zeta)_2 U_1 + (\zeta\xi)_2 U_2 + (\xi\eta)_2 U_3 \\ x_3 &= \xi_3 X_1 + \eta_3 X_2 + \zeta_3 X_3 & u_3 &= (\eta\zeta)_3 U_1 + (\zeta\xi)_3 U_2 + (\xi\eta)_3 U_3, \end{aligned} \tag{21}$$

so geht dieselbe in eine Form der neuen Veränderlichen

$$X_1, X_2, X_3 \qquad U_1, U_2, U_3$$

mit denselben Gradzahlen über, deren Coëfficienten allgemein mit (φ) bezeichnet werden sollen und die Coëfficienten von φ linear-homogen, die Elemente

$$\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{matrix} \tag{22}$$

im Grade $m+2n$ und überdies sowohl ξ_1, ξ_2, ξ_3 als auch η_1, η_2, η_3 und $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ homogen enthalten. Eine ganze Function der Coëfficienten (φ), einer oder mehrerer durch die Substitution (21) aus den Formen

$$\varphi, \tag{23}$$

hervorgehenden Formen, welche ausserhalb dieser Coëfficienten weder die Elemente (22) noch die Coëfficienten der Formen (23) enthält, soll allgemein mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet werden.

Durch die Polarenbildungen (17) werden die Coëfficienten (φ) in lineare Functionen derselben Coëfficienten — mit Zahlencoëfficienten — verwandelt. Ist nämlich $\bar{\varphi}$ die aus φ durch die Substitution (21) hervorgehende Form, so wird etwa

$$\binom{\eta}{\xi} \bar{\varphi} = X_1 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial X_2} - U_2 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial U_1}.$$

Es ist daher auch

$$\binom{\eta}{\xi} \mathfrak{G} = \mathfrak{G} \qquad \binom{\zeta}{\eta} \mathfrak{G} = \mathfrak{G} \tag{24}$$

Nach (18) ist

$$\nabla_{\xi\eta\zeta} (\xi\eta\zeta)^p \mathfrak{G} = (\xi\eta\zeta)^{p-1} \mathfrak{G}. \tag{25}$$

Ein invariantes Gebilde $\Theta(x, u)$ einer oder mehrerer ternären Formen kann als ein Ausdruck definirt werden, welcher in Bezug auf die Coëfficienten jeder dieser Formen und jede der Coordinatengruppen (19), (20) ganz und homogen ist, und einer Identität von der Form

$$(\xi\eta\zeta)^r \Theta(\xi_1 X_1 + \eta_1 X_2 + \zeta_1 X_3, \ldots, (\eta\zeta)_1 U_1 + (\zeta\xi)_1 U_2 + (\xi\eta)_1 U_3, \ldots) = \mathfrak{G} \tag{26}$$

genügt. Die ganze Zahl r soll der Exponent des invarianten Gebildes genannt werden.

Ein invariantes Gebilde mit negativem Exponenten ist immer durch u_x theilbar; aus einer Identität von der Form

$$\Theta(\xi_1 X_1 + \eta_1 X_2 + \zeta_1 X_3, \quad (\eta\zeta)_1 U_1 + \ldots, \ldots) = (\xi\eta\zeta)^{\gamma} \mathfrak{G}$$

folgt nämlich, wenn man

$$X_1 = U_3 = 1 \qquad X_2 = X_3 = U_1 = U_2 = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0$$

setzt:

$$\Theta(\xi, \xi \cdot \eta) = 0.$$

Da, wenn unter $x_1, \ldots, u_1, \ldots$ die Polynome (21) verstanden werden, aus (26)

$$(\xi\eta\zeta)^r \left(\frac{\partial^2 \Theta(x, u)}{\partial X_1 \partial U_1} + \quad\right) = \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial X_1 \partial U_1} + \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial X_2 \partial U_2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial X_3 \partial U_3}$$

also auch

$$(\xi\eta\zeta)^{r+1} \square_{xu} \Theta = \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial X_1 \partial U_1} + \quad = \mathfrak{G}$$

folgt, so sind $\square_{xu}\Theta$, $\square_{xu}^2\Theta$, zugleich mit Θ invariante Gebilde. Hieraus und aus (16) ergibt sich, dass alle invarianten Gebilde eines Formensystems sich linear durch invariante Gebilde darstellen lassen, welche der Gleichung (11) genügen und zu welchen Potenzen von u_x als Factoren hinzutreten.

Wenn es sich demnach um Aufstellung eines allgemeinen Bildungsgesetzes für invariante Gebilde handelt, so kann man sich auf solche Gebilde beschränken, welche der Gleichung (11) genügen und keinen negativen Exponenten haben können. Ist Θ ein solches Gebilde und setzt man in (26)

$$X_1 = U_3 = 1 \quad X_2 = X_3 = U_1 = U_2 = 0,$$

so ergiebt sich

$$(\xi\eta\zeta)^r \Theta(\xi, \xi \cdot \eta) = \mathfrak{G}, \tag{27}$$

und hieraus, wenn m, n die Gradzahlen von Θ bezeichnen, nach (18), (14)

$$\Theta = \binom{x}{\xi}^m \binom{u}{\xi\eta}^n \nabla^r_{\xi\eta\zeta} \mathfrak{G}. \tag{28}$$

Ist umgekehrt $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die Coëfficienten der einzelnen Formen des Formensystems (23) homogen, in Bezug auf die Elemente der drei Zeilen des Elementensystems (22) homogen und vom Grade p, q, r und $p \geqq q \geqq r$, so ist der Ausdruck

$$\Theta = \binom{x}{\xi}^{p-q} \binom{u}{\xi\eta}^{q-r} \nabla^r_{\xi\eta\zeta} \mathfrak{G},$$

wenn er nicht identisch verschwindet, ein invariantes Gebilde des Formensystems (23) mit dem Exponenten r und den Gradzahlen $p-q$, $q-r$. Es sei, um dies darzuthun

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_i &= \xi_i\xi'_1 + \eta_i\xi'_2 + \zeta_i\xi'_3 \\ \mathfrak{b}_i &= \xi_i\eta'_1 + \eta_i\eta'_2 + \zeta_i\eta'_3 \\ \mathfrak{c}_i &= \xi_i\zeta'_1 + \eta_i\zeta'_2 + \zeta_i\zeta'_3 \end{aligned} \tag{29}$$

und es gehe $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}^0$ über, wenn man ξ_i, η_i, ζ_i für jeden Werth von i durch $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$ ersetzt. Es ist dann $\mathfrak{G}^0$ eine ganze Function $(p+q+r)^{\text{ten}}$ Grades der Elemente ξ'_1, $\xi'_2, \ldots$ ζ'_3 und enthält die Coëfficienten der Formen (23) sowie die Elemente (22) nur in den Verbindungen (φ), . .; denn die Formen (23) werden durch die Substitution

$$x_i = \mathfrak{a}_i\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{b}_i\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{c}_i\mathfrak{X}_3 \qquad u_i = (\mathfrak{bc})_i\mathfrak{U}_1 + (\mathfrak{ca})_i\mathfrak{U}_2 + (\mathfrak{ab})_i\mathfrak{U}_3$$

in dieselben Formen verwandelt, wie durch die nach einander zu bewerkstelligenden Substitutionen

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i X_1 + \eta_i X_2 + \zeta_i X_3 \qquad & u_i &= (\eta\zeta)_i U_1 + (\zeta\xi)_i U_2 + (\xi\eta)_i U_3 \\ X_i &= \xi'_i\mathfrak{X}_1 + \eta'_i\mathfrak{X}_2 + \zeta'_i\mathfrak{X}_3 \qquad & U_i &= (\eta'\zeta')_i\mathfrak{U}_1 + (\zeta'\xi')_i\mathfrak{U}_2 + (\xi'\eta')_i\mathfrak{U}_3. \end{aligned}$$

Versteht man nun unter x_1, . ., u_1, . . die Polynome (21), so hat man nach bekannten Regeln für eine Function der Polynome (29)

$$\nabla_{\xi'\eta'\zeta'} = (\xi\eta\zeta) \nabla_{\mathfrak{abc}}$$

$$\binom{U}{\xi'\eta'} = \binom{u}{\mathfrak{ab}}$$

$$\binom{X}{\xi'} = \binom{x}{\mathfrak{a}}.$$

Demzufolge wird

$$\binom{X}{\xi'}^{p-q}\binom{U}{\xi'\eta'}^{q-r}\nabla^{r}_{\xi'\eta'\zeta'}\mathfrak{G}^0 = (\xi\eta\zeta)^r\binom{x}{\mathfrak{a}}^{p-q}\binom{u}{\mathfrak{ab}}^{q-r}\nabla^{r}_{\mathfrak{abc}}\mathfrak{G}^0$$

und da einerseits

$$\binom{x}{\mathfrak{a}}^{p-q}\binom{u}{\mathfrak{ab}}^{q-r}\nabla^{r}_{\mathfrak{abc}}\mathfrak{G}^0 = \Theta(x, u)$$

ist und andererseits der Ausdruck

$$\binom{X}{\xi'}^{p-q}\binom{U}{\xi'\eta'}^{q-r}\nabla^{r}_{\xi'\eta'\zeta'}\mathfrak{G}^0$$

die Gestalt $\mathfrak{G}$ hat, so hat man die Identität (26).

Vermehrt man das System (23) um die Formen s_x, u_z, so fallen die Invarianten des neuen Formensystems mit allen invarianten Gebilden des ursprünglichen Formensystems und umgekehrt zusammen, wenn man in letzteren die Punkt- und Strahlencoordinaten mit z_1, z_2, z_3, s_1, s_2, s_3 bezeichnet.

7.

Jede gegebene ganze Function $\mathfrak{G}_1$ der Coëfficienten (φ),... welche in Bezug auf die Coëfficienten jeder der Formen (23) und in Bezug auf die Elemente jeder Zeile des Elementensystems (22) homogen ist, lässt sich in der Form

$$\mathfrak{G}_1 = \Sigma\mathfrak{z}(\Gamma_0)+(\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}_1(\Gamma_1)+(\xi\eta\zeta)^2\Sigma\mathfrak{z}_2(\Gamma_2)+\ldots \tag{30}$$

darstellen, wo $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}_1$,... Zahlencoëfficienten und Γ_0, Γ_1, der Gleichung (11) genügende invariante Gebilde des Formensystems (23) mit den Exponenten 0, 1,.. bezeichnen.

I. Wenn $\mathfrak{G}_1$ die Elemente ζ_1, ζ_2, ζ_3 nicht enthält und in Bezug auf ξ_1, ξ_2, ξ_3 und η_1, η_2, η_3 vom Grade μ und ν ist, so hat man nach Formel (20) meines citirten Aufsatzes

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{z}(\Gamma_0)+\mathfrak{z}'(\Gamma_0^{(1)})+\mathfrak{z}''(\Gamma_0^{(2)})+\ldots$$

wo

$$\Gamma_0^{(k)} = \binom{x}{\xi}^{\mu-k}\binom{x}{\eta}^{\nu-k}\binom{u}{\xi\eta}^{k}\mathfrak{G}_1$$

und

$$(\Gamma_0^{(k)}) = \binom{\eta}{\xi}^{\nu-k} \Gamma_0^{(k)}(\xi, \xi\cdot\eta).$$ [1]

II. Enthält $\mathfrak{G}_1$ die Elemente ζ_1, ζ_2, ζ_3, so hat man nach Formel (6) des citirten Aufsatzes

$$\mathfrak{G}_1 = \Sigma \mathfrak{z} [P] + (\xi\eta\zeta) P_1,$$

wo P_1 linear zusammengesetzt ist aus

$$\omega_1 = \nabla_{\xi\eta\zeta}(\mathfrak{G}_1)$$

und Polaren dieses Ausdrucks und $[P]$ Polaren von Ausdrücken P bezeichnen, welche selbst wieder Polaren von $\mathfrak{G}_1$ sind, aber ζ_1, ζ_2, ζ_3 nicht enthalten. Alle diese Ausdrücke P haben wieder die Form $\mathfrak{G}$ und können nach I entwickelt werden, so dass man

$$\mathfrak{G}_1 = \Sigma \mathfrak{z} (\Gamma_0) + (\xi\eta\zeta) P_1 \tag{31}$$

setzen kann. Mit der Function ω_1 kann ebenso wie mit $\mathfrak{G}_1$ verfahren und

$$\omega_1 = \Sigma \mathfrak{z} [Q] + (\xi\eta\zeta) P_2$$

gesetzt werden, wo P_2 aus

$$\omega_2 = \nabla^2_{\xi\eta\zeta} \mathfrak{G}_1$$

und Polaren dieses Ausdruckes linear zusammengesetzt ist und $[Q]$ Polaren von Ausdrücken Q bezeichnen, welche selbst Polaren von ω_1 sind aber ζ_1, ζ_2, ζ_3 nicht enthalten. Alle diese Ausdrücke haben die Form $\nabla_{\xi\eta\zeta} \mathfrak{G}$, weil die Operation $\nabla_{\xi\eta\zeta}$ mit allen Polarenbildungen (17) vertauschbar ist, und man kann, indem man die Formel (20) des citirten Aufsatzes auf dieselben anwendet,

$$Q = \Sigma \mathfrak{z} (\Gamma_1)$$

setzen, wo Γ_1 invariante Gebilde des Formensystems (23) mit dem Exponenten 1 bezeichnen. Da aber P_1 aus ω_1 und Polaren von ω_1 linear zusammengesetzt ist, so hat man auch

$$P_1 = \Sigma \mathfrak{z}_1 (\Gamma_1) + (\xi\eta\zeta) P_2'$$

---

[1] Vergl. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie. S. 926.

und demgemäss

$$\mathfrak{G}_1 = \Sigma_{\mathfrak{z}}(\Gamma_0)+(\xi\eta\zeta)\Sigma_{\mathfrak{z}1}(\Gamma_1)+(\xi\eta\zeta)^2 P'_2.$$

ω_2 kann wieder wie ω_1 behandelt werden u. s. f.

8.

Lineare Formen.[1]

Es sei ein System linearer Formen der Veränderlichen (19), (20)

$$a_x,\ b_x, \tag{32}$$

$$u_\alpha,\ u_\beta, \tag{33}$$

gegeben und es soll die allgemeine Gestalt aller Invarianten Θ dieses Systems bestimmt werden.

Man hat drei Fälle zu unterscheiden.

I. Alle Invarianten, welche nur die Coëfficienten der Formen (32) enthalten, entstehen aus einer ganzen homogenen Function $\mathfrak{G}$ $3r^{\text{ten}}$ Grades der Coëfficienten

$$a_\xi,\ a_\eta,\ a_\zeta,\ b_\xi, \tag{34}$$

der transformirten Formen durch $r$malige Ausführung der Operation $\nabla_{\xi\eta\zeta}$.

Nun ist

$$\frac{\partial^3\mathfrak{G}}{\partial\xi_\lambda\,\partial\eta_\mu\,\partial\zeta_\nu} = \frac{\partial^3\mathfrak{G}}{\partial a_\xi\partial a_\eta\partial a_\zeta}\,a_\lambda a_\mu a_\nu + \frac{\partial^3\mathfrak{G}}{\partial a_\xi\,\partial a_\eta\partial b_\zeta}\,a_\lambda a_\mu b_\nu + \\ + \frac{\partial^3\mathfrak{G}}{\partial a_\xi\partial b_\eta\partial c_\zeta}\,a_\lambda b_\mu c_\nu + \ldots$$

und demzufolge

$$\nabla_{\xi\eta\zeta}\,\mathfrak{G} = 0,$$

wenn die Anzahl der Formen (32) < 3 ist, dagegen

$$\nabla_{\xi\eta\zeta}\,\mathfrak{G} = (abc)\,\mathfrak{G}' + \ldots,$$

wenn diese Anzahl $\geqq 3$ ist. Nach $r$maliger Ausführung der Ope-

[1] Clebsch, Über symbolische Darstellung algebraischer Formen, Crelle, Bd. LIX.

ration $\nabla_{\xi\eta\zeta}$ erhält man daher in letzterem Falle eine ganze homogene Function r^{ten} Grades der Determinanten

$$(abc), \tag{35}$$

II. Alle Invarianten vom Exponenten r, welche nur die Coëfficienten der Formen (33) enthalten, entstehen aus einer ganzen homogenen Function $\mathfrak{G}$ der Coëfficienten

$$(\alpha\eta\zeta),\ (\alpha\zeta\xi),\ (\alpha\xi\eta),. \tag{36}$$

vom Grade $\frac{3r}{2}$ durch $r$malige Ausführung der Operation $\nabla_{\xi\eta\zeta}$, woraus zugleich erhellt, dass r gerade sein muss. Die Function $\mathfrak{G}$ lässt sich nach 1 durch die Polarenbildungen

$$\binom{\alpha}{\xi},\ \binom{\alpha}{\eta},\ \binom{\alpha}{\zeta}, \tag{37}$$

aus Ausdrücken ableiten, welche selbst Polaren von $\mathfrak{G}$ sind, aber die Coëfficienten $\alpha_1, \ldots, \beta_1, \ldots$ nicht mehr enthalten und daher nur die Form $C(\xi\eta\zeta)^{\frac{3r}{2}}$ haben können. Vollzieht man die Operation $\nabla^r_{\xi\eta\zeta}$, so ergibt sich ein Resultat von der Form $MC(\xi\eta\zeta)^{\frac{r}{2}}$ und die Ausführung der Polarenbildungen (37) liefert, wenn die Anzahl der Formen (33) $\geqq 3$ ist, eine ganze Function $\frac{1}{2}r^{\text{ten}}$ Grades der Determinanten

$$(\alpha\beta\gamma), \tag{38}$$

und im Gegenfalle ein identisch verschwindendes Resultat.

III. Enthält eine Invariante Θ sowohl Coëfficienten der Formen (32) als auch Coëfficienten der Formen (33) und zwar letztere im Grade n, so hat man

$$\Theta = \nabla^r_{\xi\eta\zeta}\mathfrak{G},$$

wo $\mathfrak{G}$ eine ganze Function der Coëfficienten (34), (36) bezeichnet und durch die Polarenbildungen (37) aus Ausdrücken abgeleitet werden kann, welche die Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1,$ nicht mehr enthalten und daher die Form $(\xi\eta\zeta)^n G$ haben, wenn unter G eine ganze Function der Coëfficienten (34) verstanden wird.

Ist nun $r < n$, so hat man

$$\nabla^{r}_{\xi\eta\zeta}(\xi\eta\zeta)^n G = (\xi\eta\zeta)^{n-r} G'$$

und nach Ausführung der Operationen (37) eine ganze Function der Determinanten (38) und der Ausdrücke

$$a_\alpha, a_\beta, \ldots \quad b_\alpha, b_\beta, \tag{39}$$

Ist insbesondere die Anzahl der Formen (33) < 3, so ist $\Theta = 0$.

Ist $r = n$ so hat man

$$\nabla^{r}_{\xi\eta\zeta}(\xi\eta\zeta)^n G = G'$$

und erhält für Θ eine ganze Function der Ausdrücke (39).

Ist $r > n$, so wird

$$\nabla^{r}_{\xi\eta\zeta}(\xi\eta\zeta)^n G = \nabla^{r-n}_{\xi\eta\zeta} G'$$

und man erhält nach $r-n$facher Ausführung der Operation $\nabla_{\xi\eta\zeta}$ eine ganze homogene Function $r-n^{\text{ten}}$ Grades der Determinanten (35) und n^{ten} Grades der Ausdrücke (34), welch' letztere durch die Polarenbildungen (37) in (39) übergehen. Ist insbesondere die Anzahl der Formen (32) < 3, so ist $\Theta = 0$.

Alle Invarianten der Formen (32), (33) sind demnach ganze Functionen der einfachsten Invarianten (35), (38), (39).

9.

Invariante Gebilde einer quadratischen Form.[1]

Es sei eine quadratische Form

$$f(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2$$

gegeben, und es werde

$$f(x, y) = \frac{1}{2!}\binom{y}{x} f(x) = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

$$f(i, x) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

[1] Clebsch-Lindemann, Vorl. über Geom. S. 287.

$$\begin{array}{lll} f(\xi)=c_{11} & f(\eta)=c_{22} & f(\zeta)=c_{33} \\ f(\eta,\zeta)=c_{23} & f(\zeta,\xi)=c_{31} & f(\xi,\eta)=c_{12} \end{array} \tag{40}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{23}a_{31}a_{12}-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{31}^2-a_{33}a_{12}^2$$

$$= D$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & u_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & u_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & u_3 \\ u_1, & u_2, & u_3, & 0 \end{vmatrix} = (a_{22}a_{33}-a_{23}^2)\,u_1^2+\ldots$$

$$+2(a_{12}a_{13}-a_{11}a_{23})\,u_2u_3+$$

$$= F(u)$$

$$F(u,v) = \tfrac{1}{2}\binom{v}{u} F(u)$$

$$F(i,u) = \tfrac{1}{2}\,\frac{\partial F(u)}{\partial u_i}$$

gesetzt. Nennt man F kurz die Gegenform von f, so ist $Df(x)$ die Gegenform von $F(u)$ und man hat die Identitäten:

$$\begin{array}{l} f(x,x')\,f(y,y')-f(x,y')\,f(y,x') = F(x\cdot y,\, x'\cdot y') \\ F(u,u')\,F(v,v')-F(u,v')\,F(v,u') = Df(u\cdot v,\, u'\cdot v'). \end{array} \tag{41}$$

Die Form f geht durch die Substitution (21) in

$$c_{11}X_1^2+c_{22}X_2^2+c_{33}X_3^2+2c_{23}X_2X_3+2c_{13}X_3X_1+2c_{12}X_1X_2$$

über und wenn $\mathfrak{G}$ eine ganze homogene Function der Ausdrücke (40) bezeichnet, so lassen sich alle invarianten Gebilde von f linear durch die Gebilde

$$\Theta = \binom{x}{\xi}^m \binom{u}{\xi\eta}^n \nabla^r_{\xi\eta\zeta}\,\mathfrak{G}, \tag{42}$$

multiplicirt mit Potenzen von u_x, ausdrücken.

Um die allgemeine Gestalt der Gebilde (42) zu ermitteln, sind die Fälle $r=0$ und $r>0$ zu unterscheiden.

I. Ist $r = 0$, so kann $\mathfrak{G}$ nur c_{11}, c_{12}, c_{22} enthalten, weil ζ_1, ζ_2, ζ_3 darin nicht vorkommen dürfen.

Ist auch noch $n = 0$, so kann $\mathfrak{G}$ nur die Form Cc_{11}^p haben und man hat

$$\Theta = \binom{x}{\xi}^m Cf(\xi)^p;$$

es kann also m nur $= 2p$ und

$$\Theta = C_1 f^p(x)$$

sein.

Ist $n > 0$, so hat man nach bekannten Regeln

$$\frac{\partial^2\mathfrak{G}}{\partial\xi_\rho\,\partial\eta_\sigma} - \frac{\partial^2\mathfrak{G}}{\partial\xi_\sigma\,\partial\eta_\rho} = \left(\frac{4\partial^2\mathfrak{G}}{\partial c_{11}\,\partial c_{22}} - \frac{\partial^2\mathfrak{G}}{\partial c_{12}^2}\right)(f(\rho,\xi)f(\sigma,\eta) - f(\rho,\eta)f(\sigma,\xi))$$

und hieraus:

$$\binom{u}{\xi\eta}\mathfrak{G} = \left(\frac{4\partial^2\mathfrak{G}}{\partial c_{11}\,\partial c_{22}} - \frac{\partial^2\mathfrak{G}}{\partial c_{12}^2}\right)\cdot\Sigma\pm u_1 f(2,\xi)f(3,\eta) = F(u,\xi\cdot\eta)\,.\,\mathfrak{G}.$$

Nach (12) folgt dann

$$\binom{u}{\xi\eta}^2\mathfrak{G} = F(u,\xi\cdot\eta)\binom{u}{\xi\eta}\mathfrak{G} + F(u)\,.\,\mathfrak{G}$$

$$-\frac{1}{2}u_\xi\left[\frac{\partial F(u)}{\partial u_1}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\xi_1} + .\quad\right] - \frac{1}{2}u_\eta\left[\frac{\partial F(u)}{\partial u_1}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\eta_1} + \quad\right];$$

es ist aber

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\xi_1} + \quad = \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial c_{11}}\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial c_{11}}{\partial\xi_1} + \quad\right) + \frac{\partial G}{\partial c_{12}}\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial c_{12}}{\partial\xi_1}\,. + ..\right)$$

$$= 4Du_\xi\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial c_{11}} + 2Du_\eta\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial c_{12}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\eta_1} + \quad = \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial c_{12}}\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial c_{12}}{\partial\eta_1} + ..\right) + \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial c_{22}}\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial c_{22}}{\partial\eta_1} + .\quad\right)$$

$$= 2Du_\xi\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial c_{12}} + 4Du_\eta\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial c_{22}}$$

und, wie so eben gefunden wurde,

$$\binom{u}{\xi\eta}\mathfrak{G} = F(u,\xi\cdot\eta)\,\mathfrak{G}.$$

Hienach hat man also

$$\binom{u}{\xi\eta}^2\mathfrak{G} = F(u).\mathfrak{G} + F(u,\xi\cdot\eta)^2\mathfrak{G}$$
$$+ Du_\xi^2\mathfrak{G} + Du_\xi u_\eta\mathfrak{G} + Du_\eta^2\mathfrak{G}$$

und wenn man noch $F(u,\xi\cdot\eta)^2$ nach (41) durch

$$F(u)\,F(\xi\cdot\eta) - D(f(\xi)\,u_\eta^2 - 2f(\xi,\eta)\,u_\eta u_\xi + f(\eta)\,u_\xi^2)$$
$$= F(u)(c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2) - D(c_{11}\,u_\eta^2 - 2c_{12}\,u_\eta u_\xi + c_{22}u_\xi^2)$$

ersetzt, so wird allgemein

$$\binom{u}{\xi\eta}^2\mathfrak{G} = F(u).\mathfrak{G} + Du_\xi^2\mathfrak{G} + Du_\xi u_\eta\mathfrak{G} + Du_\eta^2\mathfrak{G}.$$

Aus dieser Formel folgt nun leicht nach (8)

$$\binom{u}{\xi\eta}^n\mathfrak{G} = F^{\frac{n}{2}}.\mathfrak{G} + Du_\xi^2 F^{\frac{n}{2}-1}\mathfrak{G} + Du_\xi u_\eta F^{\frac{n}{2}-1}\mathfrak{G} + Du_\eta^2 F^{\frac{n}{2}-1}\mathfrak{G}$$
$$+ D^2 u_\xi^4 F^{\frac{n}{2}-2}\mathfrak{G} + \ldots \tag{43}$$

wenn n gerade, und

$$= F(u,\xi\cdot\eta)\,[F^{\frac{n-1}{2}}\mathfrak{G} + .\quad .],$$

wenn n ungerade ist.

Hieraus schliesst man zunächst, dass die Gebilde der betrachteten Art nur von gerader Classe sein können. Ferner dürfen η_1, η_2, η_3 in der Formel (43) nicht mehr vorkommen und es müssen daher alle Glieder mit u_η fortfallen und die Ausdrücke $\mathfrak{G}$ sich auf Potenzen von c_{11} — von constanten Coëfficienten abgesehen — reduciren. Man hat daher nach Ausführung der Polarenbildungen $\binom{x}{\xi}$:

$$\Theta = C_0 f^p F^{\frac{n}{2}} + C_1 Du_x^2 f^{p-1} F^{\frac{n}{2}-1} + C_2 D^2 u_x^4 f^{p-2} F^{\frac{n}{2}-2} + \ldots . \tag{44}$$

II. Wenn $r > 0$ ist, so hat man zunächst die Wirkung der Operation $\nabla_{\xi\eta\zeta}$ auf eine ganze Function $\mathfrak{G}$ zu ermitteln. Man findet, wenn α, β, γ irgend eine Permutation von 1, 2, 3 bilden,

$$\frac{\partial^3 \mathfrak{G}}{\partial \xi_\alpha \partial \eta_\beta \partial \zeta_\gamma} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial \zeta_\gamma \partial c_{12}} + a_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial \eta_\beta \partial c_{13}} + a_{\beta\gamma} \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial \xi_\alpha \partial c_{23}}$$
$$+ \sum \frac{\partial^3 \mathfrak{G}}{\partial c_{1\rho} \partial c_{2\sigma} \partial c_{3\tau}} \frac{\partial c_{1\rho}}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial c_{2\sigma}}{\partial \eta_\beta} \frac{\partial c_{3\tau}}{\partial \zeta_\gamma},$$

wo das Summenzeichen sich auf alle Werthe 1, 2, 3 von ρ, σ, τ bezieht. Setzt man statt α, β, γ alle sechs Permutationen der Stellenzeiger 1, 2, 3 und addirt alle auf diese Weise aus der vorstehenden Identität hervorgehenden Gleichungen, nachdem man sie mit dem Vorzeichen der Permutationsclasse versehen hat, so ergibt sich für $\nabla_{\xi\eta\zeta} \mathfrak{G}$ ein Aggregat von Gliedern, welche alle die Gestalt

$$\mathfrak{G} \,.\, \sum \pm \frac{\partial c_{1\rho}}{\partial \xi_1} \frac{\partial c_{2\sigma}}{\partial \eta_2} \frac{\partial c_{3\gamma}}{\partial \zeta_3}$$

haben; in dem besonderen Falle, wo Θ in Bezug auf die Coëfficienten von f die dritte Ordnung nicht erreicht, erhält man ein identisch verschwindendes Resultat. Die Determinante

$$\sum \pm \frac{\partial c_{1\rho}}{\partial \xi_1} \frac{\partial c_{2\sigma}}{\partial \eta_2} \frac{\partial c_{3\tau}}{\partial \zeta_3}$$

ist aber, wenn unter den Stellenzeigern ρ, σ, τ gleiche vorkommen, identisch $= 0$, und wenn ρ, σ, τ verschieden sind oder ohne Rücksicht auf die Reihenfolge mit 1, 2, 3 zusammenfallen, von einem Zahlenfactor abgesehen

$$= \sum \pm f(1,\xi) f(2,\eta) f(3,\zeta) = D(\xi\eta\zeta).$$

Es ist sonach

$$\nabla_{\xi\eta\zeta} \mathfrak{G} = D \,.\, \mathfrak{G} \,.\, (\xi\eta\zeta).$$

Nach (25) folgt hieraus

$$\nabla^2_{\xi\eta\zeta} \mathfrak{G} = D \,.\, \mathfrak{G}.$$

Bezeichnet daher ν die grösste in $\frac{r}{2}$ enthaltene ganze Zahl, so wird, je nachdem r gerade oder ungerade ist

$$\nabla^{r}_{\xi\eta\zeta}\mathfrak{G} = D^{\nu}\mathfrak{G}$$

oder

$$= D^{\nu}.\mathfrak{G}.(\xi\eta\zeta).$$

Im zweiten Falle müsste Θ identisch verschwinden und es gibt daher nur invariante Gebilde mit geradem Exponenten, welche der Gleichung (11) genügen.

Ist nun Θ eine Invariante, so hat man

$$\Theta = C.D^{\nu}.$$

Ist dagegen Θ vom Grade m und der Classe n, so hat man

$$\Theta = D^{\nu}\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}^{m}\begin{pmatrix} u \\ \xi\eta \end{pmatrix}^{n}\mathfrak{G} = D^{\nu}\,\Theta_0,$$

wo Θ_0 ein invariantes Gebilde vom Exponenten 0 bezeichnet und die Form (44) hat.

Alle invarianten Gebilde von f sind demnach ganze Functionen der Ausdrücke

$$D,\ f,\ F,\ u_x.$$

10.

Es seien $\omega(x,u)$, $\omega'(x,u)$ zwei der Gleichung (11) genügende ternäre Formen mit den Gradzahlen m, n und m', n'. Man denke sich diese Formen durch die Substitution (21) transformirt und es handle sich um die Entwickelung des Ausdruckes

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}^{p}\begin{pmatrix} u \\ \xi\eta \end{pmatrix}^{q}\nabla^{r}_{\xi\eta\zeta}(\omega)(\omega'),$$

wo

$$p+2q+3r = m+2n+m'+2n'.$$

Da

$$\omega = \frac{1}{(m!\ n!)^2}\square^{m}_{yt}\square^{n}_{zv}\,\omega(y,\ v)\ t^{m}_{x}\ u^{n}_{z}$$

$$\omega' = \frac{1}{(m'!\ n'!)^2}\square^{m'}_{y't'}\square^{n'}_{z'v'}\,\omega'(y',\ v')t'^{m'}_{x}\ u^{n'}_{z'},$$

so hat man

$$(\omega) = C \,\square_{yt}^{m} \square_{zv}^{n} \,\omega(y, v).\, Q$$
$$(\omega') = C' \,\square_{y't'}^{m'} \square_{z'v'}^{n'} \,\omega'(y', v').\, Q',$$

wo

$$Q = t_{\xi}^{\lambda}\, t_{\eta}^{\mu}\, t_{\zeta}^{\nu}\, (z\eta\zeta)^{\rho} (z\zeta\xi)^{\sigma} (z\xi\eta)^{\tau}$$
$$Q' = t'^{\lambda'}_{\xi}\, t'^{\mu'}_{\eta}\, t'^{\nu'}_{\zeta}\, (z'\eta\zeta)^{\rho'} (z'\zeta\xi)^{\sigma'} (z'\xi\eta)^{\tau'}$$

und

$$\lambda + \mu + \nu = m \qquad \rho + \sigma + \tau = n$$
$$\lambda' + \mu' + \nu' = m' \qquad \rho' + \sigma' + \tau' = n',$$

und demzufolge

$$\mathfrak{A} = CC' \,\square_{yt}^{m} \square_{zv}^{n} \square_{y't'}^{m'} \square_{z'v'}^{n'} \,\omega(y, v)\; \omega'(y', v') \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}^{p} \begin{pmatrix} u \\ \xi\eta \end{pmatrix}^{q} \nabla_{\xi\eta\zeta}^{r}\, Q \;\; Q$$

Nach 8 ist

$$\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}^{p} \begin{pmatrix} u \\ \xi\eta \end{pmatrix}^{q} \nabla_{\xi\eta\zeta}^{r}\, QQ'$$

eine ganze Function der Ausdrücke

$$(tt'u) \qquad\qquad (xzz')$$

$$t_x,\; t_z,\; t_{z'},\; t'_x,\; t'_z,\; t'_{z'},\; u_x,\; u_z,\; u_{z'},$$

und zerfällt demgemäss in Glieder, welche alle die Form

$$P = \mathfrak{z} u_x^k\, t_{z'}^{a}\, t'^{b}_{z}\, t_z^{\varepsilon}\, t'^{\varepsilon'}_{z'}\, t_x^{c}\, t'^{c'}_{x}\, u_z^{d}\, u_{z'}^{d'}\, (tt'u)^{e}$$

oder die Form

$$P' = \mathfrak{z} u_x^k\, t_{z'}^{a}\, t'^{b}_{z}\, t_z^{\varepsilon}\, t'^{\varepsilon'}_{z'}\, t_x^{c}\, t'^{c'}_{x}\, u_z^{d}\, u_{z'}^{d'}\, (xzz')^{e}$$

haben. Führt man nun die Operationen $\square_{yt}$, an

$$P\omega(y, v)\; \omega'(y', v'), \quad P'\omega(y, v)\; \omega'(y', v')$$

mit Hilfe der Formeln in 2, 3 aus, so ergeben sich Ausdrücke von der Form

$$\mathfrak{z}_1\, u_x^k \begin{pmatrix} u \\ yy' \end{pmatrix}^e \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^c \begin{pmatrix} x \\ y' \end{pmatrix}^{c'} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^d \begin{pmatrix} u \\ v' \end{pmatrix}^{d'} \square^a_{yv'}\, \square^b_{y'v}\, \square^\varepsilon_{yv}\, \square^{\varepsilon'}_{y'v'}\, \omega(y,v)\, \omega'(y',v')$$

$$\mathfrak{z}_1\, u_x^k \begin{pmatrix} \\ vv' \end{pmatrix}^e \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^c \begin{pmatrix} x \\ y' \end{pmatrix}^{c'} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^d \begin{pmatrix} u \\ v' \end{pmatrix}^{d'} \square^a_{yv'}\, \square^b_{y'v}\, \square^\varepsilon_{yv}\, \square^{\varepsilon'}_{y'v'}\, \omega(y,v)\, \omega'(y',v'),$$

welche der Gleichung (11) zufolge in allen Fällen, wo $\varepsilon > 0$ oder $\varepsilon' > 0$, identisch verschwinden, und man hat

$$\mathfrak{A} = \sum \mathfrak{z}\, u_x^k \begin{pmatrix} u \\ yy' \end{pmatrix}^e \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^c \begin{pmatrix} x \\ y' \end{pmatrix}^{c'} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^d \begin{pmatrix} u \\ v' \end{pmatrix}^{d'} \square^a_{yv'}\, \square^b_{y'v}\, \omega(y,v)\, \omega'(y',v'),$$

wo mit Rücksicht auf die Gradverhältnisse

$$k+c+c' = p \qquad k+d+d'+e = q$$

$$a+c+e = m \qquad b+d = n \qquad b+c'+e = m' \qquad a+d' = n',$$

oder

$$\mathfrak{A} = \sum \mathfrak{z}\, u_x^k \begin{pmatrix} x \\ vv' \end{pmatrix}^e \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^c \begin{pmatrix} x \\ y' \end{pmatrix}^{c'} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^d \begin{pmatrix} u \\ v' \end{pmatrix}^{d'} \square^a_{yv'}\, \square^b_{y'v}\, \omega(y,v)\, \omega'(y',v'),$$

wo

$$k+c+c'+e = p \qquad k+d+d' = q$$

$$a+c = m \qquad b+d+e = n \qquad b+c' = m' \qquad a+d'+e = n'.$$

In dem besonderen Falle, wo $p = q = 0$ ist, muss, wenn kein identisch verschwindendes Resultat sich ergeben soll,

$$a = m = n' \qquad b = n = m'$$

sein.

Zwei Formen von der Art, dass die Classe jeder derselben dem Grade der anderen gleich ist, sollen Formen mit complementären Gradzahlen heissen. Sind f, g solche Formen mit den Gradzahlen m, n und n, m und

$$\begin{pmatrix} m \\ \alpha\beta\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ \lambda\mu\nu \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} \lambda\mu\nu \\ \alpha\beta\gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} n \\ \alpha\beta\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ \lambda\mu\nu \end{pmatrix} g\begin{pmatrix} \lambda\mu\nu \\ \alpha\beta\gamma \end{pmatrix}$$

die Coëfficienten des Productes

$$x_1^\alpha\, x_2^\beta\, x_3^\gamma\;\; u_1^\lambda\, u_2^\mu\, u_3^\nu$$

in denselben, wo unter $\binom{m}{\alpha\beta\gamma}$ der Coëfficient von $x_1^\alpha\, x_2^\beta\, x_3^\gamma$ in $(x_1+x_2+x_3)^m$ zu verstehen ist, so werde ich den Ausdruck

$$\sum \binom{m}{\alpha\beta\gamma} \binom{n}{\lambda\mu\nu} f\binom{\lambda\mu\nu}{\alpha\beta\gamma}\, g\binom{\alpha\beta\gamma}{\lambda\mu\nu},$$

in welchem sich das Summenzeichen auf alle aus nicht negativen ganzen Zahlen bestehenden Lösungen der Gleichungen

$$\alpha+\beta+\gamma = m \qquad\qquad \lambda+\mu+\nu = n$$

bezieht, mit $[f, f']$ bezeichnen. Wie leicht zu sehen, ist

$$[f, f] = \frac{1}{(m!\, n!)^2} \square^m_{yv'} \square^n_{y'v}\, f(y, v)\, g(y', v'). \tag{45}$$

Auch für den Fall, wo f, g die Gradzahlen 0, 0 haben, soll diese Bezeichnung und zwar für das Product $f.g$ beibehalten werden. In dem vorliegenden Falle ist demnach

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \nabla^r_{\xi\eta\zeta} (\omega)\, (\omega') = C[\omega, \omega'] \\ r &= m+n \end{aligned}$$

oder

$$= 0,$$

je nachdem ω, ω' complementäre Gradzahlen besitzen oder nicht.

11.

Mit Hilfe der Formeln (45), (5), (7) findet man

$$[f, u^a_x g] = \mathfrak{z}[\square^a_{xu} f, g]. \tag{46}$$

Wenn ω, ω' zwei Formen mit complementären Gradzahlen sind und, nach (16) entwickelt, die Gestalt

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + u_x\, \omega_1 + u_x^2\, \omega_2 + . \\ \omega' &= \omega_0' + u_x\, \omega_1' + u_x^2\, \omega_2' + \ldots \end{aligned}$$

annehmen, so ist

$$[\omega, \omega'] = [\omega_0, \omega_0'] + C_1 [\omega_1, \omega_1'] + C_2 [\omega_2, \omega_2'] + \ldots \tag{47}$$

Denn es ist einerseits

$$[\omega, \omega'] = \Sigma\, [u_x^a\ \omega_a\,,\ u_x^b\, \omega_b']$$

und andererseits nach (46)

$$[u_x^a\, \omega_a,\ u_x^b\, \omega_b'] = C[\omega, \omega']$$

oder

$$= 0,$$

je nachdem $a = b$ oder $a \lesseqgtr b$ ist.

12.

Wenn

$$g \quad g' \quad h \quad h' \tag{48}$$

Formen mit den Gradzahlen

$$m,\ n \qquad n,\ m \qquad m',\ n' \qquad n',\ m'$$

sind, so ist die Differenz

$$[gh,\ g'h'] - [g,\ g']\ [h,\ h']$$

in der Form

$$\mathfrak{z}[A,\ A'] + \mathfrak{z}'[B,\ B'] + . \tag{49}$$

darstellbar, wo $A, B, \ldots$ invariante Gebilde des Formensystemes (g, h), $A', B', \ldots$ solche des Systems (g', h') bezeichnen, deren Gradzahlsummen $< m+n+m'+n'$ sind.

Denkt man sich die Formen (48) durch die Substitution (21) transformirt und die Coëfficienten der transformirten Formen mit

$$\binom{m}{\alpha\beta\gamma}\binom{n}{\lambda\,\mu\,\nu}\ \bar{g}\binom{\lambda\,\mu\,\nu}{\alpha\beta\gamma},$$

bezeichnet, so wird

$$(\xi\eta\zeta)^{m+n}\ [g,\ g'] = \sum \binom{m}{\alpha\beta\gamma}\binom{n}{\lambda\,\mu\,\nu}\ \bar{g}\binom{\lambda\,\mu\,\nu}{\alpha\beta\gamma}\bar{g}'\binom{\alpha\beta\gamma}{\lambda\,\mu\,\nu}$$

$$(\xi\eta\zeta)^{m'+n'}\ [h,\ h'] = \sum \binom{m'}{\alpha'\beta'\gamma'}\binom{n'}{\lambda'\mu'\nu'}\ \bar{h}\binom{\lambda'\mu'\nu'}{\alpha'\beta'\gamma'}\bar{h}'\binom{\alpha'\beta'\gamma'}{\lambda'\mu'\nu'}$$

und demzufolge

$$(\xi\eta\zeta)^{m+n+m'+n'}[g, g'][h, h'] = \sum \binom{m}{\alpha\beta\gamma}\binom{n}{\lambda\mu\nu}\binom{m'}{\alpha'\beta'\gamma'}\binom{n'}{\lambda'\mu'\nu'} \cdot P,$$

wo

$$P = \bar{g}\binom{\lambda\mu\nu}{\alpha\beta\gamma}\bar{h}\binom{\lambda'\mu'\nu'}{\alpha'\beta'\gamma'}\bar{g'}\binom{\alpha\beta\gamma}{\lambda\mu\nu}\bar{h'}\binom{\alpha'\beta'\gamma'}{\lambda'\mu'\nu'}.$$

Es sei nun, wenn man gh, $g'h'$ nach (16) entwickelt,

$$gh = \omega + u_x\omega_1 + \qquad\qquad g'h' = \omega' + u_x\omega_1' + .$$

und

$$\binom{m+m'}{\alpha\beta\gamma}\binom{n+n'}{\lambda\mu\nu}\bar{\omega}\binom{\lambda\mu\nu}{\alpha\beta\gamma}$$

der Coëfficient von $X_1^\alpha X_2^\beta X_3^\gamma U_1^\lambda U_2^\mu U_3^\nu$ in der durch die Substitution (21) transformirten Form ω. Entwickelt man die Differenz

$$\Delta = \bar{g}\binom{\lambda\mu\nu}{\alpha\beta\gamma}\bar{h}\binom{\lambda'\mu'\nu'}{\alpha'\beta'\gamma'} - \bar{\omega}\binom{\lambda+\lambda', \mu+\mu', \nu+\nu'}{\alpha+\alpha', \beta+\beta', \gamma+\gamma'}$$

nach (30) in

$$\Sigma\mathfrak{z}(\Gamma_0) + (\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}_1(\Gamma_1) + \ldots,$$

so kann man zunächst darthun, dass unter den Gebilden Γ_0 keine von geringerer als der $n+n'+1$ten Classe vorkommen. Diese Gebilde gehen durch die Operationen $\binom{u}{\xi\eta}$, $\binom{x}{\xi}$, $\binom{x}{\eta}$ aus Polaren von Δ hervor, welche ζ_1, ζ_2, ζ_3 nicht mehr enthalten und in Folge dessen lineare Functionen der Coëfficienten des Ausdruckes Δ^0 sind, in welchen Δ nach Ersetzung von ξ_i, η_i, ζ_i durch $\mathfrak{X}_1\xi_i + \mathfrak{X}_2\eta_i$, $\mathfrak{Y}_1\xi_i + \mathfrak{Y}_2\eta_i$, $\mathfrak{Z}_1\xi_i + \mathfrak{Z}_2\eta_i$ übergeht. Denkt man sich eine Form $\varphi(x, u)$ nur durch die Substitution

$$x_i = \xi_i X_1 + \eta_i X_2 + \zeta_i X_3$$

transformirt und den Coëfficienten von $X_1^\alpha X_2^\beta X_3^\gamma$ in der transformirten Form mit $\binom{m}{\alpha\beta\gamma}\varphi_{\alpha\beta\gamma}(u)$ bezeichnet, wo unter m der Grad von φ zu verstehen ist, und setzt man

$$g_{\alpha\beta\gamma}(u)h_{\alpha'\beta'\gamma'}(u) - \omega_{\alpha+\alpha',\beta+\beta',\gamma+\gamma'}(u) = \Psi(\xi_1,..,\eta_1,..,\zeta_1,..,u)$$

so wird

$$\Delta^0 = (\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})^{\lambda+\lambda'}..\,\Psi(\mathfrak{X}_1\xi_1+\mathfrak{X}_2\eta_1,..,\mathfrak{Y}_1\xi_1+\mathfrak{Y}_2\eta_1,..,\mathfrak{Z}_1\xi_1+\mathfrak{Z}_2\eta_1,..,\xi\cdot\eta)$$

und es ist klar, dass alle Coëfficienten von Δ^0 linear aus den Coëfficienten des Ausdruckes

$$\Psi(\mathfrak{X}_1\xi_1+\mathfrak{X}_2\eta_1,..,\mathfrak{Y}_1\xi_1+\mathfrak{Y}_2\eta_1,..,\mathfrak{Z}_1\xi_1+\mathfrak{Z}_2\eta_1,..,\xi\cdot\eta)$$

zusammengesetzt sind, welche allgemein mit $\psi(\xi,\eta,\xi\cdot\eta)$ bezeichnet werden sollen. Nach (12) enthält nun $\binom{u}{\xi\eta}^p\psi$, wenn $p<n+n'$, die Determinanten $(\xi\eta)_1,.$ wenigstens im ersten Grade und verschwindet somit identisch nach Ausführung der Operationen $\binom{x}{\xi}$, $\binom{x}{\eta}$. Ferner ist nach derselben Formel, von Gliedern abgesehen, welche u_ξ oder u_η oder die Determinanten $(\xi\eta)_1,..$ enthalten,

$$\binom{u}{\xi\eta}^{n+n'}\psi = \mathfrak{z}\psi(\xi,\eta,u)$$

und die Gebilde Γ_0 $(n+n')^{\text{ter}}$ Classe sind demgemäss alle linear aus Ausdrücken von der Form

$$C\psi(x,x,u)+Ku_x$$

zusammengesetzt; $\psi(x,x,u)$ ist aber ein Coëfficient von

$$\Psi(x_1(\mathfrak{X}_1+\mathfrak{X}_2),..,x_1(\mathfrak{Y}_1+\mathfrak{Y}_2),..,x_1(\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2),..,u)$$
$$=(\mathfrak{X}_1+\mathfrak{X}_2)^{\alpha+\alpha'}..\,\Psi(x_1,..,x_1,..,x_1,..,u)=(\mathfrak{X}_1+\mathfrak{X}_2)^{\alpha+\alpha'}..(gh-\omega).$$

und daher durch u_x theilbar. Alle Gebilde Γ_0 $(n+n')^{\text{ter}}$ Classe müssen sonach verschwinden weil sie durch u_x theilbar sind und der Gleichung (11) genügen.

Ebenso ergibt sich

$$\bar{g}'\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\\ \lambda\mu\nu\end{pmatrix}\bar{h}'\begin{pmatrix}\alpha'\beta'\gamma'\\ \lambda'\mu'\nu'\end{pmatrix}-\bar{\omega}'\begin{pmatrix}\alpha+\alpha',\ \beta+\beta',\ \gamma+\gamma'\\ \lambda+\lambda',\ \mu+\mu',\ \nu+\nu'\end{pmatrix}$$
$$=\Sigma\mathfrak{z}'(\Gamma'_0)+(\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}'_1(\Gamma'_1)+.$$

wo unter den Gebilden Γ'_0 keine von geringerer als der $m+m'+1^{\text{ten}}$ Classe vorkommen.

Ersetzt man die Producte

$$\bar{g}\binom{\lambda\,\mu\,\nu}{\alpha\,\beta\,\gamma}\bar{h}\binom{\lambda'\,\mu'\,\nu'}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'} \qquad \bar{g}'\binom{\alpha\,\beta\,\gamma}{\lambda\,\mu\,\nu}\bar{h}'\binom{\alpha'\,\beta'\,\gamma'}{\lambda'\,\mu'\,\nu'}$$

durch

$$\bar{\omega}\binom{\lambda+\lambda',\ \mu+\mu',\ \nu+\nu'}{\alpha+\alpha',\ \beta+\beta',\ \gamma+\gamma'} + \Sigma\mathfrak{z}(\Gamma_0)+(\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}_1(\Gamma_1)+ .$$

$$\bar{\omega}'\binom{\alpha+\alpha',\ \beta+\beta',\ \gamma+\gamma'}{\lambda+\lambda',\ \mu+\mu',\ \nu+\nu'} + \Sigma\mathfrak{z}'(\Gamma_0')+(\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}_1'(\Gamma_1')+\ldots,$$

so ergibt sich

$$P = \bar{\omega}\binom{\lambda+\lambda',\ \mu+\mu',\ \nu+\nu'}{\alpha+\alpha',\ \beta+\beta',\ \gamma+\gamma'}\ \bar{\omega}'\binom{\alpha+\alpha',\ \beta+\beta',\ \gamma+\gamma'}{\lambda+\lambda',\ \mu+\mu',\ \nu+\nu',}$$

$$+\Sigma\mathfrak{z}(\Gamma_0)(\omega')+\Sigma\mathfrak{z}'(\Gamma_0')(\omega)+\Sigma\mathfrak{z}''(\Gamma_0)(\Gamma_0')+(\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}_1(\Gamma_1)(\omega')+ .$$

Die Vollziehung der Operation $\nabla_{\xi\eta\zeta}^{m+m'+n+n'}$, nach welcher alle Glieder fortfallen, welche Gebilden mit nicht complementären Gradzahlen entsprechen, also namentlich die Glieder $\mathfrak{z}(\Gamma_0)(\omega')$, $\mathfrak{z}'(\Gamma_0')(\omega)$, $\mathfrak{z}''(\Gamma_0)(\Gamma_0')$, zeigt nun, dass die Differenz

$$\nabla_{\xi\eta\zeta}^{m+m'+n+n'} P - \nabla_{\xi\eta\zeta}^{m+m'+n+n'}\ \bar{\omega}\binom{\lambda+\lambda',\ldots}{\alpha+\alpha',\ldots}\bar{\omega}'\binom{\alpha+\alpha',\ldots}{\lambda+\lambda',\ldots}$$

$$= \Sigma\, C \nabla_{\xi\eta\zeta}^{m+m'+n+n'-1}(\Gamma_1)(\omega')+ .$$

die Form (49) hat. Dieselbe Form bleibt erhalten, wenn man mit

$$\binom{m}{\alpha\,\beta\,\gamma}\binom{m'}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'}\binom{n}{\lambda\,\mu\,\nu}\binom{n'}{\lambda'\,\mu'\,\nu'}$$

multiplicirt und in Bezug auf alle Werthe von $\alpha, \beta, \gamma,\ \alpha', \beta', \gamma'$, $\lambda, \mu, \nu,\ \lambda', \mu', \nu'$ summirt, welche den Gleichungen

$$\alpha+\beta+\gamma = m \qquad \alpha'+\beta'+\gamma' = m'$$
$$\lambda+\mu+\nu = n \qquad \lambda'+\mu'+\nu' = n'$$

genügen. Es wird dann

$$\Sigma\binom{m}{\alpha\,\beta\,\gamma}\binom{m'}{\alpha'\,\beta'\,\gamma'}\binom{n}{\lambda\,\mu\,\nu}\binom{n'}{\lambda'\,\mu'\,\nu'}\nabla_{\xi\eta\zeta}^{m+m'+n+n'} P$$

$$= \nabla_{\xi\eta\zeta}^{m+m'+n+n'}(\xi\eta\zeta)^{m+m'+n+n'}[g, g'][h, h']$$

und, wenn zunächst die Glieder zusammengefasst werden, in welchen

$$\alpha+\alpha', \beta+\beta', \gamma+\gamma', \quad \lambda+\lambda', \mu+\mu', \nu+\nu'$$

dieselben den Gleichungen

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c} = m+m' \qquad \mathfrak{d}+\mathfrak{e}+\mathfrak{f} = n+n'$$

genügenden Werthe $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ haben:

$$\Sigma\binom{m}{\alpha\beta\gamma}\binom{m'}{\alpha'\beta'\gamma'}\binom{n}{\lambda\mu\nu}\binom{n'}{\lambda'\mu'\nu'}\nabla_{\xi\eta\zeta}^{m+m'+n+n'}\varpi\binom{\lambda+\lambda',.}{\alpha+\alpha',..}\varpi'\binom{\alpha+\alpha',.:}{\lambda+\lambda',\ .}$$

$$= \Sigma\binom{m+m'}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\binom{n+n'}{\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{f}}\nabla_{\xi\eta\zeta}^{m+m'+n+n'}\varpi\binom{\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{f}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\varpi'\binom{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}\mathfrak{e}\mathfrak{f}}$$

$$= \nabla_{\xi\eta\zeta}^{m+m'+n+n'}(\xi\eta\zeta)^{m+m'+n+n'}[\omega,\omega'].$$

Es hat sonach

$$\nabla_{\xi\eta\zeta}^{m+m'+n+n'}(\xi\eta\zeta)^{m+m'+n+n'}\big([g,g'][h,h']-[\omega,\omega']\big)$$

$$= M\big([g,g'][h,h]-[\omega,\omega']\big)$$

und daher auch

$$[g,g'][h,h']-[\omega,\omega']$$

die gewünschte Form und da nach (47) dasselbe von $[gh, g'h']$ $-[\omega,\omega']$ gilt, so ist der obige Satz bewiesen.

13.

Es seien S, S' zwei Systeme ternärer Grundformen und Θ eine gemeinschaftliche Invariante derselben. Bezeichnen P, P' Producte von Coëfficienten der Formen, welche durch die Substitution (21) aus den Formen von S, beziehungsweise S', hervorgehen, so hat man

$$\Theta.(\xi\eta\zeta)^r = \Sigma CP.P'.$$

Nach (30) können nun P, P' in die Form

$$P = \Sigma\mathfrak{z}(\Gamma)+(\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}_1(\Gamma_1)+.$$

$$P' = \Sigma\mathfrak{z}'(\Gamma')+(\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}'(\Gamma'_1)+\ldots$$

gesetzt werden, wo $\Gamma, \Gamma_1, \ldots$ invariante Gebilde von $S, \Gamma', \Gamma'_1 ..$ solche von S' bezeichnen, und es wird

$$\Theta.(\xi\eta\zeta)^r = \Sigma C(\xi\eta\zeta)^{\alpha+\beta}(\Gamma_\alpha)(\Gamma'_\alpha)$$

Vollzieht man beiderseits die Operation $\nabla^{r}_{\xi\eta\zeta}$, so ergibt sich

$$\Theta = \Sigma C' \nabla^{r-\alpha-\beta}_{\xi\eta\zeta} (\Gamma_\alpha)(\Gamma'_\beta)$$

und man hat den Satz:

Alle gemeinsamen Invarianten der Systeme S, S' lassen sich linear zusammensetzen aus Invarianten von der Form $[\omega, \omega']$, wo ω, ω' invariante Gebilde der Systeme S, S' mit complementären Gradzahlen bezeichnen.

14.

Die invarianten Gebilde Θ eines Systems S, welche zwei Reihen

$$y_1, y_2, y_3 \qquad z_1, z_2, z_3$$

von Punktcoordinaten und zwei Reihen

$$s_1, s_2, s_3 \qquad t_1, t_2, t_3$$

von Strahlencoordinaten enthalten, entstehen aus den Gebilden desselben Systems mit nur einer Reihe von Punkt- und Strahlencoordinaten x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3 durch die Polarenbildungen

$$\binom{y}{x}, \quad \binom{z}{x}, \quad \binom{s \cdot t}{x}, \quad \binom{s}{u}, \quad \binom{t}{u}, \quad \binom{y \cdot z}{u};$$

zu diesen Polaren treten noch s_y, s_z, t_y, t_z und die Invarianten von S in ganzen Verbindungen hinzu.

Die genannten Gebilde sind nämlich Invarianten des Systems S und des Systems (u_y, u_z, s_x, t_x). Die invarianten Gebilde des letzteren sind ganze Verbindungen von

$$s_y, s_z, t_y, t_z, \quad u_y, u_z, (stu), \quad s_x, t_x, (xyz), u_x$$

und demzufolge ist jede Invariante Θ linear zusammengesetzt aus Ausdrücken von der Form

$$s_y^\lambda s_z^\mu t_y^\nu t_z^\rho \left[\Gamma, u_y^a u_z^b s_x^c t_x^d (stu)^e\right]$$

$$s_y^\lambda s_z^\mu t_y^\nu t_z^\rho \left[\Gamma, u_y^a u_z^b s_x^c t_x^d (xyz)^e\right],$$

wo Γ ein invariantes Gebilde von S bezeichnet.

15.

Wenn man für jedes von zwei gegebenen Systemen S, S' ternärer Formen einen geschlossenen Bestand invarianter Gebilde angeben kann, durch welche sich alle invarianten Gebilde des betreffenden Systems in ganzer Weise ausdrücken lassen, so kann man auch für das zusammengesetzte System (S, S') einen solchen Bestand angeben.

Es seien nach Ausschliessung von u_x

$$A,\ A_1, \ldots \qquad B,\ B_1, \ldots \tag{50}$$

$$C,\ C_1 \qquad D,\ D_1, \ldots \tag{51}$$

die invarianten Gebilde, durch welche sich alle solche Gebilde des Systems S beziehungsweise (S', s_x, u_z) in ganzer Weise ausdrücken lassen; $A, A_1, .\ \ C, C_1$, seien Invarianten und $B, B_1, .$ $D, D_1, \ldots$ invariante Gebilde mit den Gradzahlen

$$m, n, \quad m_1, n_1 \qquad\qquad m', n', \quad m'_1, n'_1$$

Man bilde alle möglichen Producte

$$P = B^{\alpha} B_1^{\beta}. \qquad P' = D^{\alpha'} D_1^{\beta'}$$

welche complementäre Gradzahlen besitzen und nicht weiter in ähnliche Producte zerfällbar sind, so dass nicht gesetzt werden kann

$$P = Q.N \qquad\qquad P' = Q'.N',$$

wo einerseits Q und Q', anderseits N und N' complementäre Gradzahlen hätten und Q, N Producte der Ausdrücke $B, B_1, \ldots,$ Q', N' Producte der Ausdrücke $D, D_1, \ldots$ wären. Die Anzahl solcher Productepaare ist immer endlich und fällt mit der Anzahl der (additiv) unzerlegbaren aus ganzen nicht negativen Zahlen bestehenden Lösungen der Gleichungen

$$m\alpha + m_1\beta + . \quad = n'\alpha' + n'_1\beta' + .$$

$$n\alpha + n_1\beta + \quad = m'\alpha' + m'_1\beta' + \ldots$$

zusammen. Alle Lösungen[1] der einen dieser Gleichungen lassen sich durch Gleichungen von der Form

[1] Crelle's Journal Bd. C, S. 225. Gordan, Math. Ann. Bd. VI, S. 23.

$$\alpha = \mathfrak{a}X + \mathfrak{a}_1 X' + ..$$
$$\beta = \mathfrak{b}X + \mathfrak{b}_1 X' + ..$$

$$\alpha' = \mathfrak{a}'X + \mathfrak{a}'_1 X + ..$$

darstellen, wo

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{a}', \qquad \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \qquad \mathfrak{a}'_1,$$

besondere Lösungen und X, X', beliebige nicht negative ganze Zahlen bezeichnen. Setzt man diese Werthe von α, β, in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$pX + p'X' + . \quad = 0,$$

worin $p, p', \ldots$ bekannte ganze Zahlen bezeichnen und welche ebenso wie die erste Gleichung behandelt werden kann.

Dies vorausgeschickt, sind alle Invarianten des Systems (S, S', s_x, u_z) oder die invarianten Gebilde des Systems (S, S') mit den Punktcoordinaten z_1, z_2, z_3 und den Strahlencoordinaten s_1, s_2, s_3 ganze Verbindungen der Invarianten

$$A, \ A_1, . \qquad C, \ C_1, . \tag{52}$$

und der Invarianten $[P, P']$.

Nach (13) ist jede Invariante Θ des Systems (S, S', s_x, u_z) linear zusammensetzbar aus Invarianten $[\omega, \omega']$, wo ω, ω' invariante Gebilde von S und (S', s_x, u_z) mit complementären Gradzahlen bezeichnen. Nach der Annahme ist ω eine ganze Verbindung der Ausdrücke (50) und der Form u_x, ω' eine solche der Ausdrücke (51) und der Form u_x. Hienach erscheint Θ, wenn

$$T = B^{\lambda} B_1^{\mu} . \qquad T' = D^{\rho} D_1^{\sigma} \ldots$$

Producte der Gebilde $B, B_1,$ beziehungsweise $D, D_1,$ bezeichnen, als lineare Function von Ausdrücken der Form

$$[u_x^a T, \ u_x^b T'] \tag{53}$$

mit Coëfficienten, welche die Invarianten (52) in ganzer Weise

enthalten; da aber, wenn a oder $b > 0$, der Ausdruck (53) sich nach (46) auf Ausdrücke $[\omega, \omega']$ zurückführen lässt, welche aus Gebilden ω, ω' mit geringerer Gradzahlsumme hervorgehen, so darf man unbeschadet der Allgemeinheit $a = b = 0$ und T, T' mit complementären Gradzahlen annehmen. Sind nun die in der Darstellung von Θ auftretenden Productepaare T, T' alle unzerfällbar, so ist die obige Behauptung bewiesen. Im Gegenfalle setze man

$$T = P.Q \qquad\qquad T' = P'.Q',$$

wo P, P' complementäre Gradzahlen besitzen und unzerfällbar sind. Alsdann zerfällt $[T, T']$ linear in $[P, P']$ $[Q, Q']$ und in Ausdrücke $[\omega, \omega']$, welche aus Gebilden ω, ω' mit geringerer Gradzahlsumme hervorgehen und wieder linear auf Ausdrücke $[T, T']$ zurückführbar sind. Sind Q, Q' wieder zerlegbar, so kann man mit $[Q, Q']$ ebenso verfahren u. s. f.

16.

Die Grundform ersten Grades und erster Classe.

Es sei eine ternäre Form mit den Gradzahlen 1, 1

$$\begin{aligned} f(x, u) = {} & a_{11} x_1 u_1 + a_{12} x_1 u_2 + a_{13} x_1 u_3 \\ & + a_{21} x_2 u_1 + a_{22} x_2 u_2 + a_{23} x_2 u_3 \\ & + a_{31} x_3 u_1 + a_{32} x_3 u_2 + a_{33} x_3 u_3 \\ = {} & \Sigma\, a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, u_\beta \end{aligned}$$

gegeben und es handle sich um die Ermittelung der allgemeinen Gestalt ihrer invarianten Gebilde.

Man setze

$$a_{i1} a_{1k} + a_{i2} a_{2k} + a_{i3} a_{3k} = b_{ik}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial u_3} = \Sigma b_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, u_\beta = g(x, u) \tag{54}$$

$$\Sigma \pm x_1 \frac{\partial f(y, u)}{\partial u_2}\frac{\partial f(z, u)}{\partial u_3} = \Sigma h_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, (yz)_\beta = h(x, yz)$$

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = A$$

$$\begin{aligned} b_{11} + b_{22} + b_{33} & = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2a_{12} a_{21} + 2a_{13} a_{31} + 2a_{23} a_{32} \\ & = B \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = C$$

$$\Sigma \pm x_1 \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial g}{u_3} = \varphi$$

$$\Sigma \pm u_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_3} = \psi.$$

Es sind dann A, B, C Invarianten von f, da

$$A = \Box_{xu} f \qquad\qquad B = \Box_{xu} g$$

$$\frac{\partial h(x, y \cdot z)}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} + . \quad = \Sigma \pm \frac{\partial f(x,u)}{\partial u_1} \frac{\partial f(y,u)}{\partial u_2} \frac{\partial f(z,u)}{\partial u_3} = C(xyz)$$

also auch

$$\frac{\partial h(x,u)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} = C u_x \tag{55}$$

ist.

Die Form h lässt sich auf g zurückführen. Aus der Identität

$$f(x,u)\, f(y,v) - f(x,v)\, f(y,u) = h(u \cdot v, x \cdot y)$$

folgt nämlich nach Vollziehung der Operation $\Box_{yv}$ und hierauf $\Box_{xu}$

$$Af - g = (h_{11} + h_{22} + h_{33}) u_x - h$$
$$A^2 - B = 2(h_{11} + h_{22} + h_{33}),$$

woraus

$$h = g - Af + {}^1/_2 (A^2 - B) u_x. \tag{56}$$

Aus dieser Identität folgt

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} + \quad = \frac{\partial f}{\partial u_1} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} - A \frac{\partial f}{\partial x_1} + {}^1/_2 (A^2 - B) u_1 \right) + .$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial g}{\partial x_1} + \ldots - Ag + {}^1/_2 (A^2 - B) f$$

und nach (55)

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial u_3} \frac{\partial g}{\partial x_3} = Ag - {}^1/_2 (A^2 - B) f + C u_x; \tag{57}$$

desgleichen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial u_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial u_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial g}{\partial u_3} = Ag - {}^1/_2 (A^2 - B) f + C u_x. \tag{58}$$

Ferner wird

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial u_1}+\ldots &= \sum_\alpha \frac{\partial g}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}+\quad\right) \\
&= \sum \frac{\partial g}{\partial x_\alpha}\frac{\partial f}{\partial u_\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta\,\partial u_\alpha} \\
&= \sum \frac{\partial f}{\partial u_\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}+\quad\right) \qquad (59)\\
&= \sum \frac{\partial f}{\partial u_\beta}\left(A\frac{\partial g}{\partial x_\beta}-\tfrac{1}{2}(A^2-B)\frac{\partial f}{\partial x_\beta}+Cu_\beta\right) \\
&= \tfrac{1}{2}(A^2+B)g+(C+\tfrac{1}{2}AB-\tfrac{1}{2}A^3)f+ACu_x.
\end{aligned}
$$

Alle invarianten Gebilde von f sind ganze Verbindungen der Ausdrücke

$$A,\ B,\ C,\ f,\ g,\ \varphi,\ \psi,\ u_x,$$

wie die nachfolgenden Erörterungen zeigen. [1]

I. Es sei zunächst Θ ein der Gleichung (11) genügendes invariantes Gebilde vom Exponenten 0, von der Classe n und der Ordnung p in Bezug auf die Coëfficienten von f. Man hat

$$\Theta(\xi, \xi\cdot\eta) = \mathfrak{G}$$

und da $\mathfrak{G}$ nur Glieder von der Form $Kf^\lambda(\xi, \xi\cdot\eta)\, f^\mu(\eta, \xi\cdot\eta)$ enthalten kann, welche sich, vom Coëfficienten abgesehen, als Polaren von $f^p(\xi, \xi\cdot\eta)$ darstellen lassen, so ist

$$\Theta(\xi, \xi\cdot\eta) = K_1\binom{\eta}{\xi}^{\mu} f^p(\xi, \xi\cdot\eta).$$

Zugleich ist ersichtlich, dass $n > 0$ sein muss. Vollzieht man die Operation $\binom{u}{\xi\,\eta}^n$, so wird

$$\Theta(\xi, u) = K_2\binom{\eta}{\xi}^{\mu}\binom{u}{\xi\,\eta}^n f^p(\xi, \xi\cdot\eta)$$

und man schliesst, dass $n = p$, $\mu = 0$ und

[1] Vergl Math. Annalen Bd. I. Über biternäre Formen mit contragredienten Variabeln von Clebsch und Gordan.

$$\Theta = K_3 \binom{x}{\xi}^n \binom{u}{\xi\eta}^n f^n(\xi, \xi\cdot\eta)$$

sein muss. Nach (13) folgt hieraus

$$\Theta = cf^n + u_x \Theta_1;$$

die Function Θ_1 ist der Gleichung (11) gemäss zu bestimmen und ergibt sich den Gleichungen (54), (57), (58), (59) zufolge als ganze Function von

$$A,\ B,\ C,\ f,\ g,\ u_x. \tag{60}$$

Ebenso hat jedes invariante Gebilde der Form g mit dem Exponenten 0 die Gestalt

$$cg^n + u_x \Theta_1;$$

wo Θ_1 so zu bestimmen ist, dass der Gleichung (11) genügt wird, und ebenfalls eine ganze Verbindung der Ausdrücke (60) ist.

II. Man kann irgend einer ganzen Function $\mathfrak{G}$ der Coëfficienten (f) immer die Gestalt $\Sigma(f)\mathfrak{G}$ geben und da (f) aus einem Producte $f(y, v)(t)(z)$ durch die Operationen $\Box_{yt}$, $\Box_{zv}$ hervorgeht, so kann man

$$\mathfrak{G} = \Box_{yt} \Box_{zv} f(y, v)\ \Sigma(t)(z)\mathfrak{G}$$

setzen. Die Summe $\Sigma(t)(z)\mathfrak{G}$ lässt sich nach 1 durch die Polarenbildungen

$$\binom{z}{\xi},\ \binom{z}{\eta},\ \binom{z}{\zeta} \tag{61}$$

aus Ausdrücken von der Form $(\xi\eta\zeta)\Sigma(t)\mathfrak{G}$ ableiten und man hat demgemäss

$$\mathfrak{G} = \Box_{yt} \Box_{zv} f(y, v) \left[\binom{z}{\xi}(\xi\eta\zeta)\Sigma(t)\mathfrak{G} + \quad\right].$$

Vollzieht man nun die Operation $\nabla_{\xi\eta\zeta}$, so ergibt sich

$$\nabla_{\xi\eta\zeta}\mathfrak{G} = \Box_{yt} \Box_{zv} f(y, v) \left[\binom{z}{\xi}\Sigma(t)\,\mathfrak{G} + \quad .\right].$$

Vollzieht man ferner die Polarenbildungen (61), so können aus den Summen $\Sigma(t)\mathfrak{G}$ nur lineare Verbindungen von Ausdrücken entstehen, welche die Gestalt

$$t_z\,\mathfrak{G}\,, \qquad (t)f(z,\,\eta\cdot\zeta)\,\mathfrak{G}\,, \qquad (t)f(\xi,\,z\cdot\eta)\,\mathfrak{G}$$

haben, wo die Determinanten $(\eta\zeta)_1, \ldots, (z\eta), \ldots$ auch durch andere von demselben Bau sowie ξ_1, ξ_2, ξ_3 durch $\eta_1, \ldots$ oder $\zeta_1, \ldots$ ersetzt werden können. Die Ausführung der Operation $\square_{zv}$ gibt dann Ausdrücke von der Form

$$f(y,t)\,.\,\mathfrak{G}\,, \qquad (t)\,g(y,\,\eta\cdot\zeta)\mathfrak{G}\,, \qquad (t)\,h(\eta,\,\xi\cdot y)\mathfrak{G},$$

welche durch die letzte Operation $\square_{yt}$ in

$$A\mathfrak{G},\ (g)\mathfrak{G},\ (h)\mathfrak{G}$$

übergehen. Nach (56) ist aber

$$\begin{aligned}(h) &= (g) - A(f) + \mathfrak{z}(A^2 - B)(\xi\eta\zeta)\\ &= \Sigma\mathfrak{z}(g) + A\Sigma\mathfrak{z}'(f)\end{aligned}$$

und man hat daher allgemein

$$\nabla_{\xi\eta\zeta}\,\mathfrak{G} = \Sigma\,(g)\mathfrak{G} + A\,.\,\mathfrak{G}\,. \tag{62}$$

Ebenso erhält man, wenn $\mathfrak{H}$ eine ganze homogene Function der Coëfficienten (g) bezeichnet

$$\begin{aligned}\nabla_{\xi\eta\zeta}\,\mathfrak{H} &= \Sigma\,\left(\tfrac{1}{2}\,(A^2+B)(g) + (C - \tfrac{1}{2}A^3 + \tfrac{1}{2}AB)(f) + \mathfrak{z}AC(\xi\eta\zeta)\right)\mathfrak{H}\\ &\quad + B\mathfrak{H} = A^2\mathfrak{H} + B\mathfrak{H} + C\Sigma(f)\mathfrak{H} + AB\Sigma(f)\mathfrak{H} + A^3\Sigma(f)\mathfrak{H}.\end{aligned} \tag{63}$$

III. Bezeichnen

$$\Gamma_p = f^p + . \qquad\qquad \Delta_p = g^p + \ldots$$

der Gleichung (11) genügende invariante Gebilde von f beziehungsweise g mit dem Exponenten 0, P_k ein Product von k Coëfficienten (f), Q_k ein Product von k Coëfficienten (g), wobei $\Gamma_0 = \Delta_0 = P_0 = Q_0 = 1$ gedacht wird, so kann man jedem Producte $P_p\ Q_q$ eine solche Gestalt geben, dass es nur aus Gliedern von der Form

$$\mathfrak{z}A^\alpha B^\beta C^\gamma(\xi\eta\zeta)^\delta(\Gamma_\lambda)(\Delta_\mu) \tag{64}$$

besteht.

Wenn $p=1$, $q=0$ ist, so hat man $\Gamma_1=f-\frac{1}{3}Au_x$ und

$$P_1=(f)=(\Gamma_1)+\mathfrak{z}A(\xi\eta\zeta).$$

Desgleichen für $p=0$, $q=1$

$$Q_1=(g)=(\Delta_1)+\mathfrak{z}B(\xi\eta\zeta).$$

Die Behauptung gilt also für die Fälle, wo $p+q=1$. Gilt dieselbe aber für alle Fälle, wo $p+q\leqq n$, so kann man sie auch für den Fall $p+q=n+1$ beweisen. Beachtet man, dass nach (62)

$$\nabla_{\xi\eta\zeta}P_p=\Sigma\mathfrak{z}P_{p-2}\cdot Q_1+A\Sigma\mathfrak{z}P_{p-1}$$

ist, so ergibt sich aus (31)

$$P_p=\Sigma\mathfrak{z}(\Gamma_p)+(\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}P_{p-2}Q_1+A(\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}P_{p-1}.$$

Hienach wird

$$P_pQ_q=Q_q\Sigma\mathfrak{z}(\Gamma_p)+(\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}P_{p-2}Q_{q+1}+A(\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}P_{p-1}Q_q. \quad (65)$$

Ferner wird aus denselben Gründen

$$Q_q=\Sigma\mathfrak{z}(\Delta_q)+(\xi\eta\zeta)[A^2\Sigma\mathfrak{z}Q_{q-1}+B\Sigma\mathfrak{z}Q_{q-1}]$$
$$+(\xi\eta\zeta)[C\Sigma P_1Q_{q-2}+\ldots].$$

Setzt man diesen Werth von Q_q in (65) ein und erwägt, dass $(\Gamma_p)=\Sigma\mathfrak{z}P_p$ ist, so ergibt sich

$$P_pQ_q=\Sigma\mathfrak{z}(\Gamma_p)(\Delta_q)+A^2(\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}P_pQ_{q-1}+B(\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}P_pQ_{q-1}$$
$$+C(\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}P_{p+1}Q_{q-2}+\ldots+(\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}P_{p-2}Q_{q+1}+A(\xi\eta\zeta)\Sigma\mathfrak{z}P_{p-1}Q_q.$$

Da nun $P_pQ_{q-1},\ldots P_{p-2}Q_{q+1}$ bereits die gewünschte Form haben, so ist auch P_pQ_q auf dieselbe gebracht.

IV. Es sei nun Θ irgend ein der Gleichung (11) genügendes invariantes Gebilde von f mit den Gradzahlen m, n und dem Exponenten r. Da

$$\Theta=\binom{x}{\xi}^m\binom{u}{\xi\eta}^n\nabla^r_{\xi\eta\zeta}\mathfrak{G}$$

ist und $\mathfrak{G}$ nach III als Summe von Ausdrücken darstellbar ist, welche alle die Form (64) haben, so erscheint Θ als lineare Function von invarianten Gebilden von der Form

$$G = \binom{x}{\xi}^m \binom{u}{\xi\eta}^n \nabla^{\rho}_{\xi\eta\zeta} (\Gamma_p)(\Delta_q)$$

mit Coëfficienten, welche ganze Verbindungen von A, B, C sind, und es handelt sich nur noch um die Ermittelung dieser Gebilde.

Wenn p oder $q = 0$ ist, so muss — wenn kein verschwindendes Resultat entstehen soll — auch $\rho = 0$ sein und man erhält die Gebilde

$$G = c\Gamma_p \qquad\qquad G = c\Delta_q.$$

Ist $p > 0$ und $q > 0$, so hat man, um G zu ermitteln, an dem Product

$$\Gamma_p(y, v)\,\Delta_q(z, w) \tag{66}$$

eine Reihe von Operationen

$$\square_{yw},\ \square_{zv},\ \binom{x}{y}, \binom{x}{z}, \binom{u}{v}, \binom{u}{w}, \binom{u}{yz}, \binom{x}{vw}$$

auszuführen, aus deren Resultaten, multiplicirt mit Potenzen von u_x, sich G nach 10 linear zusammensetzt. Das Product (66) zerfällt nach I in lauter Glieder von der Form

$$\mathfrak{z} A^\alpha B^\beta C^\gamma v_y^\delta w_z^\varepsilon f^a(y, v) g^b(y, v) f^c(z, w) g^d(z, w)$$

und es erhellt unmittelbar aus den Formeln (54), (57), (58), (59) dass sich nach Vollziehung der Operationen $\square_{yw}$, $\square_{zv}$ eine ganze Function von

$$A,\ B,\ C,\ v_y,\ v_z,\ w_y,\ w_z$$
$$f(y, v),\ f(y, w),\ f(z, v),\ f(z, w)$$
$$g(y, v),\ g(y, w),\ g(z, v),\ g(z, w)$$

ergibt. Die Ausführung der Polarenbildungen $\binom{x}{y}, \binom{x}{z}, \binom{u}{v}, \binom{u}{w}$, nach welchen entweder $y_1, .., z_1, ..$ oder $v_1, .., w_1, ..$ aus dem Resultate verschwinden müssen, ergibt eine ganze Function der Gebilde (60) und der Ausdrücke

$$v_x,\ w_x$$

$$f(x, v), \qquad f(x, w), \qquad g(x, v), \qquad g(x, w) \tag{67}$$

beziehungsweise

$$u_y, \quad u_z$$

$$f(y, u), \qquad f(z, u), \qquad g(y, u), \qquad g(z, u). \tag{68}$$

Ist keine der Operationen $\binom{x}{vw}$, $\binom{u}{yz}$ auszuführen, so müssen $y_1, \ldots, z_1, \ldots$ und $v_1, \ldots, w_1, \ldots$ zugleich aus dem Resultate verschwinden und man hat eine ganze Function der Gebilde (60).

Ist dagegen die Operation $\binom{x}{vw}$ ein- oder mehreremale zu vollziehen, so fallen (8) die mit v_x, w_x behafteten Bestandtheile fort und man hat nur eine ganze Function F der Ausdrücke (67) zu behandeln. Es ist

$$\binom{x}{vw} F = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial f(x, v)\, \partial g(x, w)} - \frac{\partial^2 F}{\partial f(x, w)\, \partial g(x, v)}\right) . \sum \pm x_1 \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial g}{\partial u_3}$$
$$= F_1 . \varphi .$$

Nach Erschöpfung der Veränderlichen $v_1, \ldots, w_1, .$ ergibt sich sonach $c . \varphi^\lambda$ als Resultat.

Die Ausführung der Operationen $\binom{u}{yz}$ an einer ganzen Function der Ausdrücke (68) führt analog zu einem Ausdrucke $c\psi^\lambda$.

17.

Zwei quadratische Formen.[1]

Nach 15 lässt sich für zwei quadratische Formen ein geschlossener Bestand invarianter Gebilde angeben, durch welche alle möglichen invarianten Gebilde dieser Formen in ganzer Weise ausdrückbar sind. Derselbe ergibt sich folgendermassen.

Es seien

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2$$
$$f' = a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + a'_{33}x_3^2 + 2a'_{23}x_2x_3 + 2a'_{31}x_3x_1 + 2a'_{12}x_1x_2$$

die beiden Grundformen und man setze

---

[1] Clebsch-Lindemann, Vorl. über Geom. S. 288.

$$a_{22}a_{33}-a_{23}^2=A_{11} \qquad a_{33}a_{11}-a_{31}^2=A_{22} \qquad a_{11}a_{22}-a_{12}^2=A_{33}$$
$$a_{12}a_{13}-a_{11}a_{23}=A_{23} \quad a_{12}a_{23}-a_{22}a_{31}=A_{31} \quad a_{13}a_{23}-a_{33}a_{12}=A_{12}$$
$$a'_{22}a'_{33}-a'^2_{23}=A'_{11} \qquad a'_{33}a'_{11}-a'^2_{31}=A'_{22} \qquad a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}=A'_{33}$$
$$a'_{12}a'_{13}-a'_{11}a'_{23}=A'_{23} \quad a'_{12}a'_{23}-a'_{22}a'_{31}=A'_{31} \quad a'_{13}a'_{23}-a'_{33}a'_{12}=A'_{12}$$

$$a_{22}a'_{33}+a_{33}a'_{22}-2a_{23}a'_{23}=B_{11} \quad a_{12}a'_{13}+a_{13}a'_{12}-a_{11}a'_{23}-a_{23}a'_{11}=B_{23}$$
$$a_{33}a'_{11}+a_{11}a'_{33}-2a_{31}a'_{31}=B_{22} \quad a_{12}a'_{23}+a_{23}a'_{12}-a_{22}a'_{31}-a_{31}a'_{22}=B_{31}$$
$$a_{11}a'_{22}+a_{22}a'_{11}-2a_{12}a'_{12}=B_{33} \quad a_{13}a'_{23}+a_{23}a'_{13}-a_{33}a'_{12}-a_{12}a'_{33}=B_{12}$$

$$A_{22}A'_{33}+A_{33}A'_{22}-2A_{23}A'_{23}=b_{11} \quad A_{12}A'_{13}+A_{13}A'_{12}-A_{11}A'_{23}-A_{23}A'_{11}=b_{23}$$
$$A_{33}A'_{11}+A_{11}A'_{33}-2A_{13}A'_{13}=b_{22} \quad A_{12}A'_{23}+A_{23}A'_{12}-A_{22}A'_{31}-A_{31}A'_{22}=b_{31}$$
$$A_{11}A'_{22}+A_{22}A'_{11}-2A_{12}A'_{12}=b_{33} \quad A_{13}A'_{23}+A_{23}A'_{13}-A_{33}A'_{12}-A_{12}A'_{33}=b_{12}$$

$$\Sigma\, A_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = F(u)$$
$$\Sigma\, A'_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = F'(u)$$
$$\Sigma\, B_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = G(u)$$
$$\Sigma\, b_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta = g(x)$$

$$\Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33} = D$$
$$\Sigma \pm a'_{11}a'_{22}a'_{33} = D'$$

$$A_{11}a'_{11}+A_{22}a'_{22}+A_{33}a'_{33}+2A_{23}a'_{23}+2A_{31}a'_{31}+2A_{12}a'_{12} = E$$
$$A'_{11}a_{11}+A'_{22}a_{22}+A'_{33}a_{33}+2A'_{23}a_{23}+2A'_{31}a_{31}+2A'_{12}a_{12} = E'.$$

Der vollständige Bestand invarianter Gebilde für die Form f ist dann:

$$D, \quad f(x), \quad F(u), \quad u_x$$

und für das System (f', u_z, s_x):

$$D,\ f'(z),\ F'(s),\ s_z$$
$$f'(x),\ F'(x\cdot z),\ F'(u),\ f'(s\cdot u)$$
$$f'(x, s\cdot u),\ F'(u, x\cdot z),\ u_x$$
$$f'(x, z),\ F'(s, x\cdot z),\ s_x$$
$$F'(s, u),\ f'(z, s\cdot u),\ u_z.$$

Um aus den invarianten Gebilden der Systeme f und (f', u_z, s_x) alle unzerlegbaren Producte P und P' mit complemen-

65*

tären Gradzahlen zu bilden, kann man für P nur eine der Annahmen

$$P = f \qquad P = F \qquad P = fF \tag{69}$$

machen. Bezeichnet nämlich (p, q) zur Abkürzung eine Form mit den Gradzahlen p, q, so müsste, wenn f in P mehr als einmal vorkäme, P' wenigstens von der Classe 4 sein, also entweder einen Factor (0, 2) oder zwei Factoren (0, 1) oder zwei Factoren (1, 1) enthalten, welche Annahmen alle zu zerfällbaren Producten führen. Dasselbe gilt, wenn F in P öfter als einmal vorkäme.

Die für P' zu machenden Annahmen werden dadurch wesentlich reducirt, dass man von den Fällen absehen darf, in welchen P' die Quadrate und Producte je zweier der Ausdrücke

$$f'(x,z), \qquad f'(z, s{\cdot}u), \qquad f'(x, s{\cdot}u)$$

oder auch der Ausdrücke

$$F'(s,u), \qquad F'(s, x{\cdot}z), \qquad F'(u, x{\cdot}z)$$

enthält. Es ist nämlich nach (41)

$$f'(x,z)^2 = f'(z)\, f'(x) - F'(x{\cdot}z)$$
$$f'(z, s{\cdot}u)^2 = f'(z)\, f'(s{\cdot}u) - F'(s)\, u_z^2 + 2F'(s,u)\, u_z s_z - F'(u)\, s_z^2$$
$$f'(x, s{\cdot}u)^2 = f'(x)\, f'(s{\cdot}u) - F'(s)\, u_x^2 + 2F'(s,u)\, u_x s_x - F'(u)\, s_x^2$$
$$f'(x,z)\, f'(x,s{\cdot}u) = f'(x)\, f'(z,s{\cdot}u) + F'(u,x{\cdot}z)\, s_x - F'(s,x{\cdot}z)\, u_x$$
$$f'(x,z)\, f'(z,s{\cdot}u) = f'(z)\, f'(x,s{\cdot}u) + F'(s,x{\cdot}z)\, u_z - F'(u,x{\cdot}z)\, s_z$$
$$f'(x,s{\cdot}u)\, f'(z,s{\cdot}u) = f'(x,z)\, f'(s{\cdot}u) - F'(s)\, u_z u_x - F'(u)\, s_x s_z + F'(s,u)\,(s_x u_z + s_z u_x)$$

$$F'(s,u)^2 = F'(s)\, F'(u) - D' f'(s{\cdot}u)$$
$$F'(s,x{\cdot}z)^2 = F'(s)\, F'(x{\cdot}z) - D'\,(f'(z)\, s_x^2 - 2f'(x,z)\, s_x s_z + f'(x)\, s_z^2)$$
$$F'(u,x{\cdot}z)^2 = F'(u)\, F'(x{\cdot}z) - D'(f'(z)\, u_x^2 - 2f'(x,z)\, u_x u_z + f'(x)\, u_z^2)$$
$$F'(s,u)\, F'(s,x{\cdot}z) = F'(s)\, F'(u,x{\cdot}z) + D'(f'(z,s{\cdot}u)\, s_x - f'(x, s{\cdot}u)\, s_z)$$
$$F'(s,u)\, F'(u,x{\cdot}z) = F'(u)\, F'(s,x{\cdot}z) + D'(f'(x,s{\cdot}u)\, u_z - f'(z,s{\cdot}u)\, u_x)$$
$$F'(s,x{\cdot}z)\, F'(u,x{\cdot}z) = F'(s,u)\, F'(x{\cdot}z) - D'(f'(x)\, u_z s_z + f'(z)\, s_x u_x - f'(x,z)\,(s_x u_z + s_z u_x)).$$

In allen diesen Fällen ist der Ausdruck $[P, P']$ linear in mehrere eventuell mit invarianten Gebilden von f' multiplicirte

Ausdrücke $[P, P']$ zerlegbar, welche den übrigen Annahmen für P' oder aber zerfallenden Producten P, P' entsprechen oder endlich wegen des Vorkommens von u_x in P' nach (46) in D und ein invariantes Gebilde von f' zerfallen.

Dies vorausgeschickt, bedingen die Annahmen (69) für P' beziehungsweise die Gestalten (0, 2) oder (0,1)·(0,1), (2,0) oder (1, 0)·(1, 0), (1,1)·(1,1) oder (1,1)·(0, 1)·(1,0) und man hat die Combinationen

$$\begin{cases} P = f(x) \\ P' = F'(u), f'(s \cdot u), f'(z, s \cdot u)\, F'(s, u), f'(z, s \cdot u) u_z, F'(s, u) u_z, u_z^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P = F(u) \\ P' = f'(x), F'(x \cdot z), f'(x, z)\, F'(s, x \cdot z), f'(x, z) s_x, F'(s, x \cdot z) s_x, s_x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P = f(x) F(u) \\ P' = f'(x, s \cdot u) F'(s, u) s_x, f'(x, s \cdot u) s_x u_z, F'(u, x \cdot z) f'(x, z) u_z, \\ \qquad\qquad F'(u, x \cdot z) s_x u_z. \end{cases}$$

Der vollständige Bestand invarianter Gebilde zweier quadratischen Formen enthält daher folgende Ausdrücke:

1. Die vier Invarianten

$$D,\ D'$$
$$[F, f'] = \Sigma A_{\alpha\beta}\, a'_{\alpha\beta} = E$$
$$[f, F'] = \Sigma a_{\alpha\beta}\, A'_{\alpha\beta} = E'$$

2. Die vier zugehörigen Formen

$$F(s),\ F'(s)$$
$$[f, f'(s \cdot u)] = G(s)$$
$$[fF, f'(x, s \cdot u)\, F'(s, u) s_x] = \Sigma \pm F(1, s)\, F'(2, s)\, G(3, s).$$

3. Die vier Covarianten

$$f(z),\ f'(z)$$
$$[F, F'(x \cdot z)] = g(z)$$
$$[fF, f'(x, z) F'(u, x \cdot z) u_z] = \Sigma \pm f(1, z) f'(2, z) g(3, z)$$

4. Die neun Zwischenformen

$$s_z$$
$$[f, F'(s, u) u_z] = f(1, z)\, F'(1, s) + f(2, z)\, F'(2, s) + f(3, z)\, F'(3, s)$$

$$[F, f'(x,z)s_x] = f'(1,z)F(1,s) + f'(2,z)F(2,s) + f'(3,z)F(3,s)$$
$$[f, f'(z, s\cdot u)u_z] = \Sigma \pm s_1 f(2,z) f'(3,z)$$
$$[F, f'(x,z)F'(s, x\cdot z)] = \Sigma \pm s_1 f'(2,z) g(3,z)$$
$$[fF, F'(u, x\cdot z)s_x u_z] = -\Sigma \pm s_1 f(2,z) g(3,z)$$
$$[F, F'(s, x\cdot z)s_x] = -\Sigma \pm z_1 F(2,s) F'(3,s)$$
$$[f, f'(z, s\cdot u)F'(s,u)] = -\Sigma \pm z_1 F'(2,s) G(3s)$$
$$[fF, f'(x, s\cdot u)s_x u_z] = \Sigma \pm z_1 F(2,s) G(3,s).$$

Setzt man

$$\begin{aligned} f'(1,x)F(1,u) + f'(2,x)F(2,u) + f'(3,x)F(3,u) &= N \\ f(1,x)F'(1,u) + f(2,x)F'(2,u) + f(3,x)F'(3,u) &= N' \end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned} \Sigma \pm F(1,u)F'(2,u)G(3,u) &= \Delta_0 \\ \Sigma \pm x_1 F(2,u)F'(3,u) &= \Delta_1 \\ \Sigma \pm x_1 F(2,u)G(3,u) &= \Delta_2 \\ \Sigma \pm x_1 F'(2,u)G(3,u) &= \Delta_3 \\ \Sigma \pm f(1,x)f'(2,x)g(3,x) &= \Delta'_0 \\ \Sigma \pm u_1 f(2,x)f'(3,x) &= \Delta'_1 \\ \Sigma \pm u_1 f(2,x)g(3,x) &= \Delta'_2 \\ \Sigma \pm u_1 f'(2,x)g(3,x) &= \Delta'_3, \end{aligned} \tag{71}$$

so lassen sich die Quadrate und Producte je zweier der Ausdrücke

$$\Delta_0, \Delta_1, \ldots \Delta'_0, \Delta'_1 \ldots$$

sowie auch N^2, NN', N'^2 als ganze Functionen der Gebilde

$$D,\ E,\ E',\ D',\ F,\ F',\ G,\ f,\ f',\ g,\ N,\ N',\ u_x \tag{72}$$

darstellen, welche in Bezug auf N, N' linear sind.

Man hat

$$\begin{aligned} N^2 &= {}^1/_4 \square^2_{yv} f'(y,x)^2 F(v,u)^2 \\ &= {}^1/_4 \square^2_{yv} [f'(x)f'(y) - F'(x\cdot y)][F(u)F(v) - Df(u\cdot v)] \\ &= f'F.\,{}^1/_4 \square^2_{yv} f'(y)F(v) - Df'\ {}^1/_4 \square^2_{yv} f'(y)f(u\cdot v) - \\ &\qquad - F.\,{}^1/_4 \square^2_{yv} F'(x\cdot y)F(v) + D\cdot{}^1/_4 \square^2_{yv} F'(x\cdot y)f(u\cdot v) \\ &= Ef'F - Df'G - gF + DfF' - 2DN'u_x + DE'u_x^2. \end{aligned} \tag{73}$$

Ebenso ergibt sich

$$N'^2 = E'fF' - D'fG - gF' + D'f'F - 2D'Nu_x + D'Eu_x^2. \quad (74)$$

Das Product NN' erhält man aus N^2 mit Hilfe der Operation

$$a'_{11}\frac{\partial}{\partial a_{11}} + a'_{22}\frac{\partial}{\partial a_{22}} + a'_{33}\frac{\partial}{\partial a_{33}} + a'_{23}\frac{\partial}{\partial a_{23}} + a'_{31}\frac{\partial}{\partial a_{31}} + a'_{12}\frac{\partial}{\partial a_{12}}$$

und es wird

$$NN' = \tfrac{1}{2}(D'F - EF')f + \tfrac{1}{2}(DF' - E'F)f' + \tfrac{1}{2}Gg + \\ + (E'N + EN')u_x - \tfrac{1}{2}(DD' + EE')u_x^2. \quad (75)$$

Behufs Bestimmung der Producte je zweier der Ausdrücke (71) ist zu bemerken, dass, wenn φ, ψ irgend zwei von den Covarianten f, f', g, Φ, Ψ irgend zwei von den zugehörigen Formen F, F', G bezeichnen, die invarianten Gebilde

$$\varphi(1, x)\Phi(1, u) + \varphi(2, x)\Phi(2, u) + \varphi(3, x)\Phi(3, u)$$

sich in Anbetracht ihrer Gradzahlen linear durch N, N', u_x, die Gebilde

$$\Sigma\, a_{\alpha\beta}\Phi(\alpha, u)\Psi(\beta, u), \qquad \Sigma\, a'_{\alpha\beta}\Phi(\alpha, u)\Psi(\beta),$$
$$\Sigma\, A_{\alpha\beta}\varphi(\alpha, x)\psi(\beta, x), \qquad \Sigma\, A'_{\alpha\beta}\varphi(\alpha, x)\psi(\beta, x),$$

aus demselben Grunde linear durch F, F', G beziehungsweise f, f', g ausdrücken lassen müssen. Hieraus folgt zunächst, dass das Product $\Delta_i\Delta'_k$ nach der Multiplicationsregel für Determinanten in eine ganze Function der Ausdrücke (72) übergeht. Um $\Delta_i\,\Delta_k$, $\Delta'_i\,\Delta'_k$ zu erhalten, denke man sich nach derselben Regel die Producte

$$\Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}\,.\,\Delta_i\,\Delta_k = D\Delta_i\,\Delta_k \qquad \Sigma \pm a'_{11}a'_{22}a'_{33}\,.\,\Delta_i\,\Delta_k = D'\,\Delta_i\,\Delta_k$$
$$\Sigma \pm A_{11}A_{22}A_{33}\,\Delta'_i\,\Delta'_k = D^2\Delta'_i\Delta'_k \qquad \Sigma \pm A'_{11}A'_{22}A'_{33}\,\Delta'_i\,\Delta'_k = D'^2\Delta'_i\Delta'_k$$

entwickelt; es ergeben sich dann ganze Functionen der Ausdrücke (72), von welchen sich der Factor D oder D', beziehungsweise D^2 oder D'^2 (bei $D^2\Delta'^2_1$ unter Zuhilfenahme der Gleichung (73)) ablösen lässt.

18.

Invarianten dreier quadratischen Formen.

Es seien f, f', f'' drei quadratische Grundformen und es werde unter Beibehaltung der in 17 gebrauchten Bezeichnungen

$$f'' = a''_{11} x_1^2 + a''_{22} x_2^2 + . \qquad + 2a''_{12} x_1 x_2$$

$$D'' = \Sigma \pm a''_{11} a''_{22} a''_{33}$$

$$F'' = - \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} & u_1 \\ a''_{21} & a''_{22} & a''_{23} & u_2 \\ a''_{31} & a''_{32} & a''_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= A''_{11} u_1^2 + A''_{22} u_2^2 + \ldots \quad + 2A''_{12} u_1 u_2$$

gesetzt.

Um alle selbstständigen Invarianten des Systems (f, f', f'') zu ermitteln, hat man zunächst aus den invarianten Gebilden

$$f'', \quad F''$$

von f'' einerseits und den in 17 aufgestellten invarianten Gebilden des Systems (f, f') andererseits alle möglichen unzerfällbaren Producte P, P' mit complementären Gradzahlen zu bilden.

Die Producte P haben alle gerade Gradzahlen. Dasselbe muss daher auch mit P' der Fall sein. Hieraus folgt, dass man bei der Bildung von P' von den Ausdrücken (70), (71) absehen darf. Da nämlich die Ausdrücke (71) eine ungerade Gradzahlensumme besitzen, so müssten sie in P' in gerader Anzahl als Factoren vorkommen und ihr Product könnte durch eine ganze Function der Gebilde (72) ersetzt werden, weil das Product je zweier dieser Ausdrücke sich in ganzer Weise durch die genannten Gebilde darstellen lässt. Da ferner N, N' ungerade Gradzahlen besitzen, so könnten sie in P' ebenfalls nur in gerader Anzahl als Factoren auftreten und man könnte ihr Product nach (73), (74) (75) durch eine ganze Function der Gebilde (72) ersetzen, in welcher N, N' nur linear und demzufolge in Verbindung mit u_x vorkommen; Bestandtheile mit u_x können aber nach (46) übergangen werden. Man braucht somit P' nur aus den Gebilden

$$f, f', g, F, F', G$$

zusammenzusetzen und erhält folgende Combinationen:

$$P = f'' \qquad P' = F, F', G$$
$$P = F'' \qquad P' = f, f', g.$$

Die Formen f, f', f'' haben demnach folgende 11 Invarianten, durch welche alle möglichen Invarianten in ganzer Weise darstellbar sind:

$$D,\ D',\ D'',\ E,\ E'$$

$$[f'', F] = \Sigma\, A_{\alpha\beta}\, a''_{\alpha\beta}$$

$$[f'', F'] = \Sigma\, A'_{\alpha\beta}\, a''_{\alpha\beta}$$

$$[f'', G] = \Sigma\, B_{\alpha\beta}\, a''_{\alpha\beta}$$

$$[F'', f] = \Sigma\, A''_{\alpha\beta}\, a_{\alpha\beta}$$

$$[F'', f'] = \Sigma\, A''_{\alpha\beta}\, a'_{\alpha\beta}$$

$$[F'', g] = \Sigma\, A''_{\alpha\beta}\, b_{\alpha\beta}.$$
